

Áp dụng mô hình cải tiến để phân tích hiện tượng phá hoại cục bộ ở vật liệu bán giòn

Trần Như Quân^{1,2}, Nguyễn Ngọc Minh^{3,4}, Bùi Quốc Tính^{3,4,*}, Hồ Đức Duy^{1,2,*}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày mô hình phá hoại cục bộ cải tiến cho vật liệu bán giòn. Trạng thái vật liệu được mô tả bằng đại lượng đặc trưng hư hại, nhận giá trị từ 0 (trạng thái nguyên vẹn) đến 1 (hư hại hoàn toàn). Mô hình phá hoại cục bộ cổ điển có ưu điểm tính toán đơn giản, tuy nhiên khó hội tụ và kết quả phụ thuộc vào mật độ lưới chia. Nhiều mô hình phá hoại phi cục bộ khác nhau đã được đề xuất, nhưng làm tăng chi phí tính toán, dẫn đến khó khăn khi áp dụng thực tế. Mặt khác, mô hình phi cục bộ thường dẫn đến dự đoán bề rộng vùng phá hoại lớn hơn nhiều so với thực tế. Ở đây, điểm cải tiến là đại lượng hư hại được liên hệ với năng lượng phá hủy và kích thước phần tử; từ đó khắc phục được các nhược điểm của mô hình phá hoại cục bộ cổ điển, trong khi vẫn giữ chi phí tính toán thấp. Bài báo đề xuất sử dụng phần tử đa giác nhằm tận dụng ưu điểm độ chính xác cao, từ đó cho phép số lượng phần tử ít hơn. Biến dạng tương đương theo *bi-energy norm* lần đầu tiên được áp dụng vào phân tích phá hoại cục bộ. Đại lượng này dựa trên tiêu chuẩn phá hủy theo năng lượng biến dạng lớn nhất, nhưng được hiệu chỉnh để xét tới đặc tính chịu nén tốt hơn chịu kéo của vật liệu bán giòn. Tính chính xác và hiệu quả của mô hình đề xuất được khảo sát và so sánh với các kết quả thực nghiệm và kết quả số khác từ tài liệu tham khảo.

Từ khóa: Mô hình phá hoại cục bộ cải tiến, bi-energy norm, vật liệu bán giòn, phần tử đa giác

¹Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh, 268 đường Lý Thường Kiệt, Quận 10, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam

²Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, TP. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam

³Viện nghiên cứu Tính toán Kỹ thuật Duy Tân (DTRICE), Trường Đại học Duy Tân, 6 Trần Nhật Duật, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam

⁴Khoa Xây dựng, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam

Liên hệ

Bùi Quốc Tính, Viện nghiên cứu Tính toán Kỹ thuật Duy Tân (DTRICE), Trường Đại học Duy Tân, 6 Trần Nhật Duật, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam

Khoa Xây dựng, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam

Email: tinh.buiquoc@gmail.com

Liên hệ

Hồ Đức Duy, Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh, 268 đường Lý Thường Kiệt, Quận 10, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam

Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, TP. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam

Email: hoducduy@hcmut.edu.vn

GIỚI THIỆU

Một số vật liệu như bê tông, đá, đá vôi ... không phải là vật liệu giòn hoàn toàn, nhưng chúng vẫn biểu hiện hành vi đứt gãy gần như vật liệu giòn. Các loại vật liệu bán giòn này được ứng dụng rộng rãi trong thiết kế kỹ thuật của các tòa nhà, đặc biệt là trong hệ thống cơ sở hạ tầng. Do sự phổ biến đó, nghiên cứu dự đoán hành vi đứt gãy cho vật liệu này đã thu hút các nhà nghiên cứu trong suốt nhiều thập kỷ qua, thông qua nhiều phương pháp như thực nghiệm, mô phỏng, lý thuyết và tính toán.

Trên phương diện mô hình tính toán, sự hư hại vật liệu có thể được biểu diễn thông qua một trường liên tục với giá trị biến thiên từ 0 (đại diện cho trạng thái nguyên vẹn) đến 1 (đại diện cho trạng thái hư hỏng hoàn toàn)¹. Mô hình đơn giản này hướng tới biểu diễn hiện tượng suy giảm khả năng chịu tải của từng điểm vật liệu do ảnh hưởng của hư hại, mà không xét đến nguyên nhân của sự hư hại (như sự hình thành vết nứt tế vi, khuyết tật trong vật liệu). Nếu giá trị biến dạng tương đương tại một điểm vượt quá ngưỡng cho phép, mức độ hư hại của điểm đó được tăng lên. Do sự hư hại được xét trên điểm vật liệu, mô hình này còn được biết đến là mô hình phá hoại cục bộ. Dù có ưu thế là tính toán đơn giản, mô hình cục bộ cổ điển có nhược điểm là kết quả phụ thuộc mật độ

lưới phần tử và khó hội tụ. Để khắc phục, một số mô hình phi cục bộ đã được đề xuất^{2,3}. Nhìn chung, có hai nhóm mô hình phi cục bộ: i) nhóm mô hình tăng cường trường đạo hàm (*gradient-enhanced damage*) và ii) nhóm mô hình dựa trên tích phân (*integral-type nonlocal damage*). Ở nhóm i), biến dạng tương đương phi cục bộ được xem như một ẩn phải giải (bên cạnh các thành phần chuyển vị) và liên hệ với đại lượng cục bộ qua một phương trình vi phân. Vì phải giải hệ hai phương trình phi tuyến (phương trình cân bằng và phương trình liên hệ giữa các biến dạng tương đương cục bộ - phi cục bộ), và tổng số ẩn phải giải tăng lên, chi phí tính toán bị tăng lên nhiều so với mô hình cục bộ. Đối với nhóm ii), biến dạng tương đương phi cục bộ tại một điểm nào đó được tính là giá trị trung bình có trọng số của những giá trị biến dạng tương đương cục bộ lân cận. Phép tính trung bình này được biểu diễn dưới dạng tích phân. Mặc dù vậy, về bản chất, tương tự hư hại xảy ra cục bộ. Việc phi cục bộ hóa dẫn đến vùng hư hại thường được dự đoán với bề rộng lớn hơn nhiều so với thực tế. Bề rộng này có thể được điều khiển bởi một tham số đặc trưng kích thước. Nhiều nghiên cứu gần đây sử dụng tham số kích thước này với giá trị thay đổi, để thu hẹp bề rộng vùng hư hại về gần với thực tế hơn. Tuy nhiên khi tham số kích thước đặc trưng nhỏ thì kích thước phần tử cũng phải

Trích dẫn bài báo này: Quân T N, Minh N N, Tính B Q, Duy H Đ. **Áp dụng mô hình cải tiến để phân tích hiện tượng phá hoại cục bộ ở vật liệu bán giòn.** *Sci. Tech. Dev. J. - Eng. Tech.*; 6(1):1772-1785.

Lịch sử

- Ngày nhận: 25-11-2022
- Ngày chấp nhận: 08-3-2023
- Ngày đăng: 31-3-2023

DOI:

<https://doi.org/10.32508/stdjet.v6i1.1052>



Bản quyền

© ĐHQG Tp.HCM. Đây là bài báo công bố mở được phát hành theo các điều khoản của the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



nhỏ theo tương ứng, góp phần làm tăng chi phí tính toán. Bên cạnh đó, còn có mô hình trường pha (*phase field*)^{4,5}. Mặc dù được xuất phát từ nền tảng vật lý và toán học khác (mượn hiện tượng biến đổi pha để mô tả trạng thái vật liệu thay đổi từ nguyên vẹn đến phá hủy, và năng lượng mở vết nứt dựa theo tiêu chuẩn Griffith), mô hình trường pha có nhiều điểm tương tự với mô hình phá hoại phi cục bộ⁶.

Gần đây, nhóm tác giả Kurumatani⁷ đề xuất cải tiến mô hình phá hoại cục bộ bằng cách đưa năng lượng phá hủy (*fracture energy*) và kích thước phần tử vào hàm tính toán sự tăng trưởng đại lượng hư hại. Điều này không chỉ bổ sung ý nghĩa vật lý cho hàm tăng trưởng hư hại, mà còn giúp giảm thiểu sự phụ thuộc của kết quả vào mật độ lưới. Tuy nhiên, biến dạng tương đương mà nhóm tác giả Kurumatani sử dụng dựa trên tiêu chuẩn Von Mises hiệu chỉnh, chưa phản ánh tốt ứng xử của vật liệu bán giòn khi chịu tải hỗn hợp⁸. Do đó, tài liệu⁸ đã đề xuất biến dạng tương đương theo tiêu chuẩn năng lượng biến dạng lớn nhất, với sự hiệu chỉnh nhằm xét đến đặc tính chịu nén tốt hơn chịu kéo của nhiều vật liệu bán giòn phổ biến như bê tông, đá vôi,... gọi là biến dạng tương đương theo hai thành phần năng lượng kéo/nén (*bi-energy norm*), trên nền tảng mô hình phá hoại phi cục bộ. Trong bài báo này, biến dạng tương đương theo *bi-energy norm* được đề xuất tích hợp vào mô hình phá hoại cục bộ cải tiến để cải thiện khả năng mô phỏng ứng xử của vật liệu khi chịu tải hỗn hợp, đồng thời duy trì chi phí tính toán thấp.

Thông thường, phần tử tam giác 3 nút hay tứ giác 4 nút sẽ được sử dụng trong quá trình tính toán vì sự đơn giản của chúng. Tuy nhiên, nhiều nghiên cứu gần đây đã chỉ ra nhiều ưu điểm của phần tử đa giác so với phần tử hữu hạn thông thường. Phần tử đa giác là dạng khái quát hóa, cho phép xây dựng các phần tử có dạng hình học là đa giác lồi *n*-cạnh ($n = 3, 4, 5, 6, \dots$), với ý tưởng ban đầu được đề xuất bởi Wachpress⁹. Phương pháp phần tử hữu hạn đa giác sau đó đã được khảo sát và phát triển thêm bởi nhiều tác giả khác¹⁰⁻¹², trong đó nêu bật độ chính xác của phần tử đa giác cao hơn so với các phần tử tam giác hay tứ giác thông thường. Về hình học, việc chia lưới đa giác có thể thực hiện một cách tự động¹¹ trên nền tảng các ô Voronoi.

Bài báo này trình bày việc xây dựng mô hình phá hoại phi cục bộ, xét đến biến dạng tương đương theo *bi-energy norm*, với hướng áp dụng trong phân tích ứng xử của vật liệu bán giòn có khả năng chịu tải nén cao hơn chịu kéo, chẳng hạn như bê tông. Trong quá trình tính toán, phần tử đa giác được đề xuất sử dụng, thay cho các phần tử tam giác và tứ giác thông thường. Tính chính xác và hiệu quả của mô hình sẽ được khảo sát và so sánh thông qua các ví dụ số.

MÔ HÌNH CẢI TIẾN ĐỂ PHÂN TÍCH PHÁ HOẠI CỤC BỘ VẬT LIỆU BÁN GIÒN

Hàm biểu diễn tăng trưởng của sự hư hại vật liệu (damage evolution)

Trong nhiều tài liệu trước^(1,2,7,8), quan hệ ứng suất-biến dạng khi có hư hại được cho như sau

$$\sigma(\epsilon) = (1 - D(\kappa))C\epsilon \quad (1)$$

Trong đó, σ là tensor ứng suất, ϵ là tensor biến dạng, C là tensor các hằng số vật liệu, và $D(\kappa)$ là hàm số biểu diễn mức độ hư hại. Đối với vật liệu như bê tông, đá vôi, sự tăng trưởng mức độ hư hại thường được biểu diễn qua một hàm số mũ

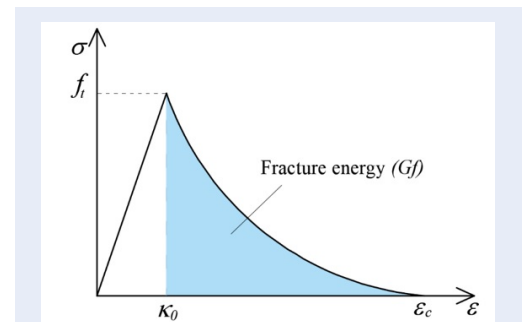
$$D(\kappa) = \begin{cases} 0, & \text{ khi } \kappa \leq \kappa_0 \\ 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \left[1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \right], & \text{ khi } \kappa > \kappa_0 \end{cases}$$

với D là đại lượng đặc trưng hư hại, là giá trị biến dạng tương đương lớn nhất trong lịch sử đặt tải. κ_0 là biến dạng tương ứng với giới hạn chịu tải kéo f_t . α và β là hai tham số thể hiện hình dáng nhánh biến mềm của đường cong ứng suất - biến dạng, và thường được tính dựa trên số liệu ứng suất - biến dạng từ thực nghiệm. Để đơn giản, ta có thể chọn trước hệ số $\alpha = 1$ và chỉ cần xác định.

Nhằm khắc phục nhược điểm phụ thuộc mật độ lưới của mô hình hư hại cục bộ cổ điển, nhóm tác giả Kurumatani⁷ đã đề xuất tính β theo mô hình lực kết dính của lý thuyết cơ học nứt như sau

$$\beta = \frac{E\epsilon_0 h_e}{G_f} \quad (3)$$

với E là mô đun đàn hồi của vật liệu; G_f là năng lượng tiêu tán do phá hủy, được tính bằng phần diện tích bên dưới đoạn biến mềm của đường cong ứng suất - biến dạng (xem Hình 1); h_e là chiều dài đặc trưng của phần tử.



Hình 1: Năng lượng phá hủy (Fracture energy)⁸

Đối với các phần tử hai chiều như tam giác và tứ giác, h_e có thể được tính thông qua diện tích phần tử A_e bởi¹

Phần tử tam giác (Triangular element): $h_e = \sqrt{2A_e}$.

Phần tử tứ giác (Quadrilateral element): $h_e = \sqrt{A_e}$.

Trong trường hợp sử dụng phần tử đa giác, $h_e = \sqrt{A_e}$ được đề xuất.

Biến dạng tương đương theo bi-energy norm⁸

Cách tính biến dạng tương đương thường được đề xuất dựa trên các tiêu chuẩn phá hủy khác nhau, như mô hình Rankine, mô hình Mazars, mô hình von Mises hiệu chỉnh ... Trong đó, mô hình von Mises hiệu chỉnh¹³ là mô hình được sử dụng phổ biến bởi nhiều tác giả, bao gồm cả nhóm Kurumatani⁷. Tuy nhiên mô hình này không thật sự phù hợp để biểu diễn ứng xử của bê tông. Số đo mật độ năng lượng có thể tính như sau¹⁴

$$Y = \varepsilon : C : \varepsilon \tag{4}$$

với ε là tensor biến dạng còn C là tensor đặc trưng thuộc tính vật liệu. Giá trị này sau đó được chia cho mô đun đàn hồi E và lấy căn bậc hai để trở thành một đại lượng có thứ nguyên tương tự như biến dạng, và do đó được gọi là biến dạng tương đương

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{\varepsilon : E : \varepsilon} \tag{5}$$

Tuy nhiên, biểu thức trên chưa phân biệt thành phần do kéo và thành phần do nén và do đó được tài liệu⁸ đề xuất sửa đổi như sau

$$\varepsilon_{eq} = \frac{k\varepsilon_{eq}^+ + \varepsilon_{eq}^-}{\lambda(k+1)} \tag{6}$$

với ε_{eq}^+ và ε_{eq}^- lần lượt ký hiệu thành phần kéo và nén của biến dạng tương đương. Trong phương trình (6), k là tỉ lệ giữa cường độ chịu tải nén và cường độ chịu tải kéo, còn $\lambda \in [0.7; 1]$ là tham số để hiệu chỉnh mô hình theo thí nghiệm.

Thành phần biến dạng tương đương kéo có thể tính bởi:

$$\varepsilon_{eq}^+ = \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{\varepsilon^+ : C : \varepsilon^+} \tag{7}$$

Trong đó

$$\varepsilon_{ij}^+ = \sum_{m=1}^3 \langle \varepsilon^m \rangle \bar{n}_i^m \bar{n}_j^m \tag{8}$$

Với ε^m là biến dạng chính thứ m , \bar{n}^m biểu diễn hướng chính thứ m . Toán tử Macaulay $\langle x \rangle$ sẽ trả lại giá trị dương của x và trả về 0 nếu x âm, cụ thể

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|) \tag{9}$$

Thành phần biến dạng tương đương nén được tính tương tự

$$\varepsilon_{eq}^- = \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{\varepsilon^- : C : \varepsilon^-} \tag{10}$$

trong đó

$$\varepsilon^- = \varepsilon_{pin} - \varepsilon^+ \tag{11}$$

với ε_{pin} là tensor chứa các thành phần biến dạng chính.

Vì xuất phát từ tiêu chuẩn năng lượng biến dạng cực đại và tách biến dạng tương đương thành hai phần kéo và nén, biến dạng tương đương ở phương trình (6) được gọi là biến dạng tương đương dựa trên hai thành phần năng lượng kéo/nén (*bi-energy norm*)

Phần tử đa giác (polygonal element)

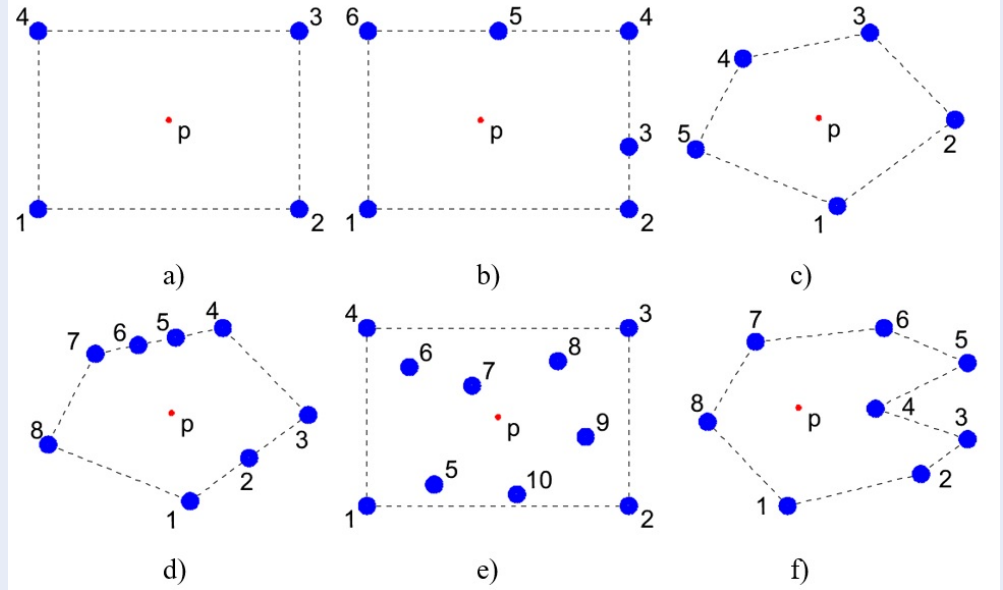
Phần tử tam giác ba nút hay tứ giác bốn nút thường được sử dụng trong phân tích phần tử hữu hạn do tính toán đơn giản. Phần tử tam giác ba nút có ưu điểm là thuận tiện trong quá trình chia lưới với các miền hình học phức tạp, nhưng giả thiết trường đạo hàm là hằng số trong miền phần tử dẫn đến sai số lớn. Phần tử tứ giác bốn nút có độ chính xác cao hơn, nhưng gặp khó khăn nhất định khi chia lưới. Do đó, họ các phần tử đa giác đã được đề xuất⁹. Khi đó, phần tử sẽ có hình dạng là đa giác với số cạnh n bất kỳ ($n = 3, 4, 5, 6, \dots$), hay n -gons. Hình 2 minh họa các dạng phần tử đa giác khác nhau. Dạng hình học của phần tử không bị giới hạn trong phạm vi hình lõm, mà có thể lõm, và trên mỗi cạnh có thể có nhiều nút. Điều này mang đến sự linh hoạt khi chia lưới [11]. Mặt khác, phần tử đa giác cũng được đánh giá là có độ chính xác cao hơn, ít nhạy với sự méo dạng (*distortion*) hơn so với phần tử hữu hạn thông thường^{10,12,15}. Việc tính toán trường đạo hàm (biến dạng, ứng suất) chính xác hơn cũng là ưu thế khi sử dụng phần tử đa giác trong phân tích hiện tượng hư hại vật liệu, như để cập bởi Huynh và cs.¹⁶ cho mô hình phi cục bộ.

Hàm dạng của đa giác $\phi_i(x)$ được xây dựng từ tập hợp các hàm trọng số không âm $\{w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)\}$. Trong đó mỗi $w_i(x)$ đều đạt được giá trị lớn nhất tại và giảm khi tăng khoảng cách từ x_i . Các hàm dạng đa giác có thể được biểu diễn tổng quát như sau¹⁷.

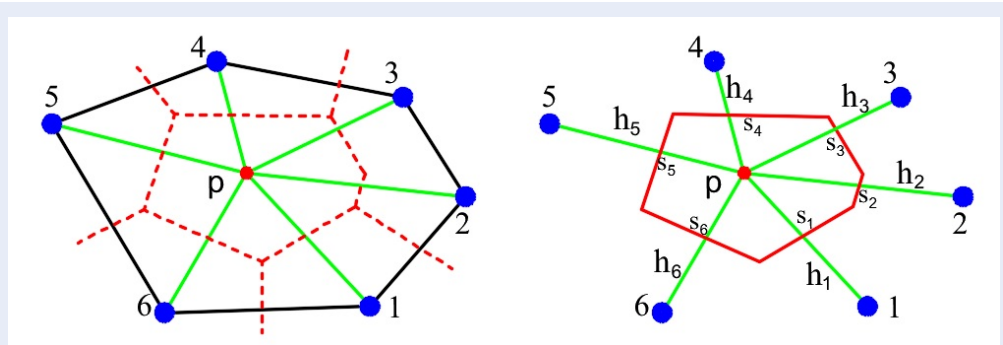
$$\phi_i(x) = \frac{w_i(x)}{\sum_{j=1}^n w_j(x)} \tag{12}$$

Cách biểu diễn này đảm bảo tính chất tổng các hàm dạng bằng 1 (*partition of unity*). Hàm trọng số Laplace tại điểm \mathbf{p} bên trong phần tử đa giác được cho bởi¹⁷

$$w_i(x) = \frac{s_i(x)}{h_i(x)} \tag{13}$$



Hình 2: Phần tử đa giác. (a) Phần tử hình chữ nhật ($n=4$); (b) Phần tử chữ nhật với các nút ở bên và giữa bên ($n=6$); (c) Phần tử năm cạnh ($n=5$); (d) Phần tử năm cạnh với các nút ở bên và giữa bên ($n=8$); (e) Phần tử bốn cạnh với các nút bên trong ($n=10$); (f) Phần tử bảy cạnh lõm ($n=7$)¹⁷



Hình 3: Xây dựng các hàm dạng Laplace trong một phần tử đa giác

trong đó n là số nút đỉnh, $w_i(x)$ là hàm trọng số Laplace, $S_i(x)$ là độ dài cạnh của ô Voronoi liên quan tới điểm p và nút a , và $h_i(x)$ là khoảng cách giữa điểm p và nút i (xem Hình 3)

KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Mô hình hư hại cục bộ cải tiến cho vật liệu bán giòn (Mục 2.1, 2.2) kết hợp với phương pháp phần tử hữu hạn đa giác (Mục 2.3) được đề xuất trong bài báo này. Tính chính xác và hiệu quả của phương án được khảo sát qua ba bài toán hai chiều:

- i) Bài toán tấm vuông có lỗ tròn chịu kéo;
- ii) Bài toán dầm chịu uốn 3 điểm;
- iii) Bài toán tấm hình chữ L.

Lưới phần tử đa giác được tạo tự động bằng chương trình PolyMesher của nhóm tác giả Talischi¹¹.

Bài toán tấm vuông có lỗ tròn chịu kéo

Nhằm kiểm chứng tính khả thi của phương pháp để khảo sát sự hư hại của vật liệu, ta khảo sát mô hình tấm hình vuông có lỗ tròn chịu kéo (Hình 4). Thông số vật liệu của tấm được cho trong Bảng 1. Thông thường nếu không có biện pháp xử lý nào thì mô hình sẽ chịu ảnh hưởng bởi lưới phần tử. Trong phần này, bằng cách sử dụng mô hình phá hoại cục bộ cải tiến để chứng minh kết quả của nó sẽ không còn phụ thuộc mật độ lưới chia như của mô hình phá hoại cục bộ cổ điển.

Trong phân tích, ta xét hai trường hợp lưới chia sử dụng phần tử tứ giác (Q4) và phần tử đa giác (*polygonal*). Hình 4a thể hiện lưới thô với 633 phần tử Q4 (683 nút), còn Hình 4b là lưới mịn với 8448 phần tử Q4 (8543 nút). Hình 4c thể hiện lưới 600 phần tử đa giác (1202 nút). Kích thước hình học của mẫu là 200x200(mm), với lỗ tròn ở chính giữa có bán kính 10 mm.

Hình 5 thể hiện các kết quả của đường cong tải trọng - chuyển vị cho cả ba trường hợp. Các đường cong thu được từ ba lưới phần tử khác nhau (Hình 5) gần như trùng nhau ở nhánh đàn hồi và vị trí đỉnh, và chỉ có khác biệt nhỏ ở nhánh phía sau đỉnh. Từ đó có thể thấy rằng lưới chia ảnh hưởng không đáng kể đến kết quả tính toán.

Bên cạnh đó (Hình 6) cho thấy sự phát triển của đại lượng hư hại D cho ba trường hợp lưới chia. Ta có thể xem vùng có $D = 1$ (vùng màu đỏ sậm) biểu hiện cho vết nứt. Tại cùng một bước tải, vị trí và độ dài của vết nứt hầu như không khác biệt. Tuy nhiên, vết nứt có xu hướng được thể hiện mảnh hơn với lưới mịn.

Bài toán dầm chịu uốn ba điểm

Trong ví dụ này, thực nghiệm dầm chịu uốn ba điểm của Kormeling và Reinhardt¹⁸ (Hình 7) sẽ được mô phỏng lại bằng mô hình tính toán để xuất. Các thông số vật liệu được tham khảo từ tài liệu^{18,19}, thể hiện ở Bảng 2. Mô hình sử dụng lưới phần tử tứ giác chia thô 600 phần tử tứ giác Q4 (662 nút), lưới phần tử tứ giác chia mịn 5505 phần tử tứ giác Q4 (5671 nút) và lưới phần tử đa giác 2000 phần tử (4019 nút). Các lưới phần tử hữu hạn được trình bày ở Hình 8. Bên cạnh so sánh với thực nghiệm, kết quả tính toán của mô hình để xuất cũng được so sánh với các mô phỏng số của tác giả Jirasek¹⁹ sử dụng cách tiếp cận phi cục bộ. Hình 9 cho thấy sự phát triển của các vết nứt trong từng giai đoạn, cụ thể: (i) vết nứt bắt đầu phát triển, ứng với đỉnh của đường cong tải-chuyển vị; sau đó vết nứt tiếp tục phát triển đi thẳng lên trên, tiến đến vị trí đặt tải (từ (ii) – (iv)); cuối cùng là hư hại nghiêm trọng (v), khi vết nứt tiến đến mặt trên của dầm.

Hình 10 so sánh đường cong tải trọng - chuyển vị thu được từ mô hình để xuất với dữ liệu thực nghiệm¹⁸ và mô phỏng của Jirasek¹⁹. Qua đồ thị, mô hình tính toán để xuất sử dụng phần tử tứ giác (cả hai trường hợp chia lưới thô và chia lưới mịn) và phần tử đa giác đều cho kết quả khá sát với vùng dữ liệu thực nghiệm. Mặt khác, kết quả tính toán khi sử dụng biến dạng tương đương theo mô hình von Mises hiệu chỉnh cho dự đoán đỉnh của đường cong thấp hơn nhiều so với thực nghiệm. Điều này cho thấy ưu điểm của việc sử dụng biến dạng tương đương theo mô hình *bi-energy norm* so với theo von Mises hiệu chỉnh.

Tiếp theo, kết quả tính toán trên lưới đa giác của mô hình cục bộ cải tiến được so sánh với mô hình phi cục bộ trên nền phần tử đa giác¹⁶ (gọi tắt là mô hình PCFEM) (Hình 11).

- Mô hình PCFEM: trình bày biến dạng trên lưới đa giác trong mô hình phi cục bộ. Một kỹ thuật dựa trên nguyên lý biến phân Hu-Washizu để tạo ra một xấp xỉ biến dạng thay vì lấy trực tiếp từ các hàm cơ sở và các trường chuyển vị. Chia lưới mịn khu vực lân cận vết nứt với kích thước phần tử khoảng 2.01 (mm).
- Mô hình cải tiến *bi-energy norm*: sử dụng mô hình phá hoại cục bộ cải tiến *bi-energy norm* với phần tử tứ giác và phần tử đa giác đều với 2000 phần tử.

Kết quả ở Hình 12 nhận thấy mô hình PCFEM (mô hình hư hại phi cục bộ) dự đoán vùng phá hoại có bề rộng lớn hơn so với mô hình cục bộ, mặc dù ở lân cận vết nứt thì mô hình PCFEM đã sử dụng lưới chia mịn. Bên cạnh đó, về cảm quan thì mô hình PCFEM cho hình ảnh vùng phá hoại trơn và cân đối, đẹp mắt hơn. Đây là những đặc điểm của mô hình phi cục bộ. Mặc dù bề rộng vùng phá hoại có thể được thu nhỏ lại thông qua việc giảm độ lớn của đại lượng kích thước đặc trưng, nhưng điều này cũng dẫn tới phải chia lưới mịn hơn, làm gia tăng khối lượng tính toán lên rất nhiều. Trên thực tế, bản chất của hiện tượng phá hủy là xảy ra cục bộ, do đó mô hình cục bộ sẽ phù hợp hơn.

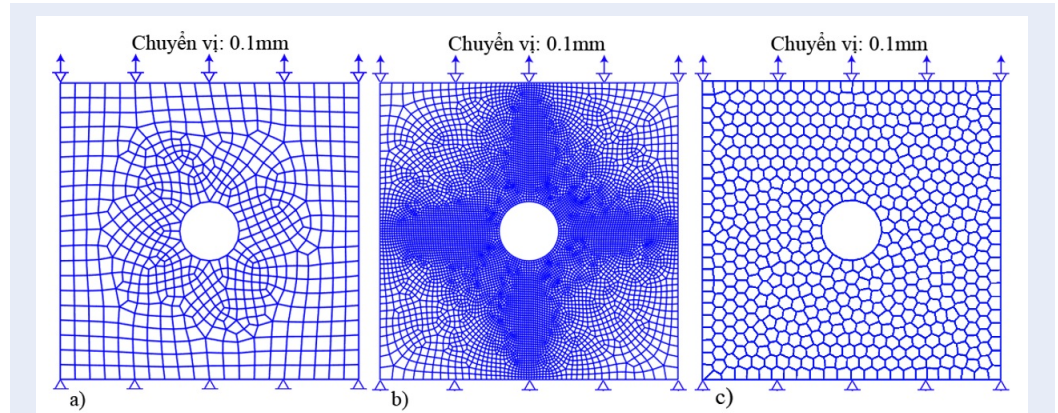
Bài toán tấm hình chữ L (L-Shaped)

Tiếp theo, xem xét một tấm bê tông hình chữ L trong điều kiện ứng suất phẳng. Mô hình hình học và điều kiện biên của tấm được thể hiện ở Hình 13. Mục tiêu chính của ví dụ này là cho thấy rõ sự ảnh hưởng của việc lựa chọn biến dạng tương đương đến kết quả. Ngoài ra, vai trò của lưới chia cũng được xem xét. Các kết quả tính toán được so sánh với số liệu thực nghiệm của tác giả Winkler²⁰, với thông số vật liệu được cho ở Bảng 3. Biểu đồ lực - chuyển vị được thu bằng cách ghi lại chuyển vị ở điểm đặt tải và phân lực ở biên chịu liên kết.

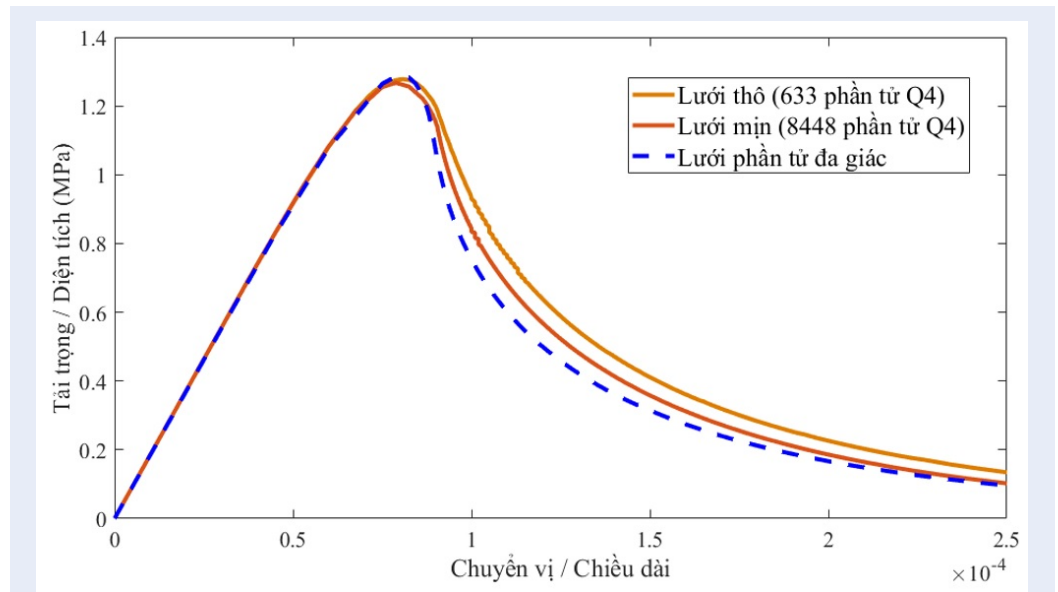
Trước tiên, hai dạng lưới tứ giác 4 nút (Q4) được xét đến ở Hình 14. Tổng số phần tử đều là 1600 phần tử (1677 nút) và đều được làm mịn ở vị trí lân cận vết nứt. Ở đây, cần nhấn mạnh là dựa trên tham khảo số liệu thực nghiệm, vị trí vết nứt đã được biết trước, và là cơ sở để làm mịn lưới. Trong thực tế kỹ thuật, hướng phát triển vết nứt thường không được biết trước. Khi đó, cần thiết phải có các kỹ thuật chia lưới đáp ứng, để tự động làm mịn lưới trong quá trình phân tích.

Bảng 1: Thông số vật liệu cho bài toán tấm có lỗ tròn chịu kéo⁷

E	ν	k	κ_0	λ	G_f
20000 MPa	0.1	10	0.0001	0.8	0.04 N/mm



Hình 4: Mô hình chia lưới tấm hình vuông có lỗ tròn chịu kéo: (a) Chia lưới thô (633 phần tử Q4); (b) Chia lưới mịn (8448 phần tử Q4); (c) Chia lưới đa giác (600 phần tử)



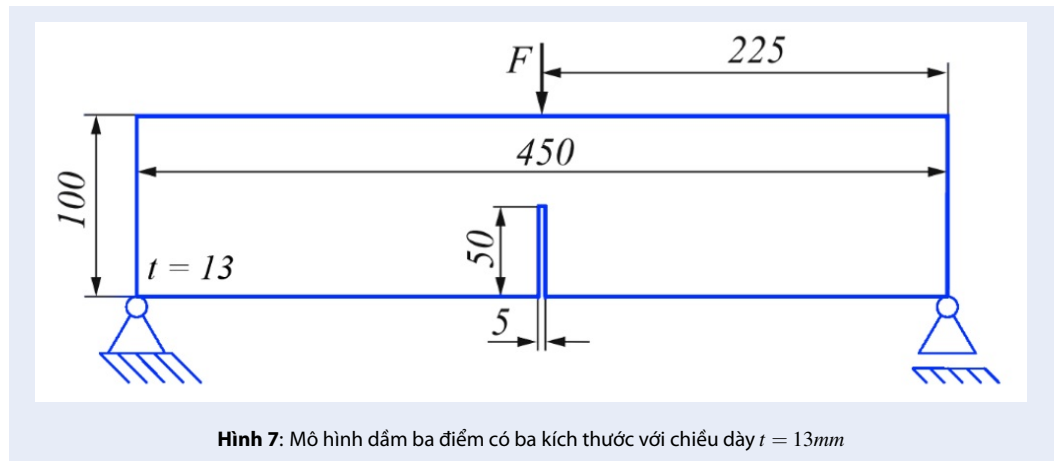
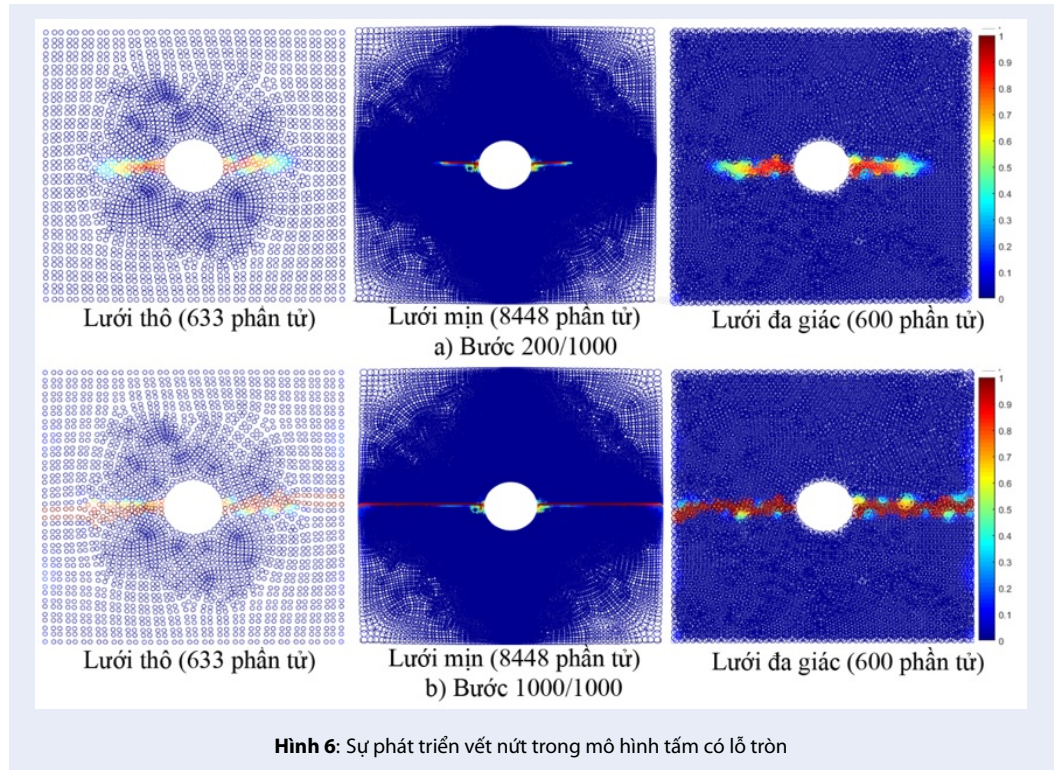
Hình 5: Biểu đồ quan hệ tải trọng - chuyển vị của mô hình tấm hình vuông có lỗ tròn

Bảng 2: Thông số vật liệu cho bài toán dầm ba điểm^{18,19}

E	ν	k	κ_0	κ_0	G_f
20000 MPa	0.2	10	90×10^{-6}	1	63.5 N/m

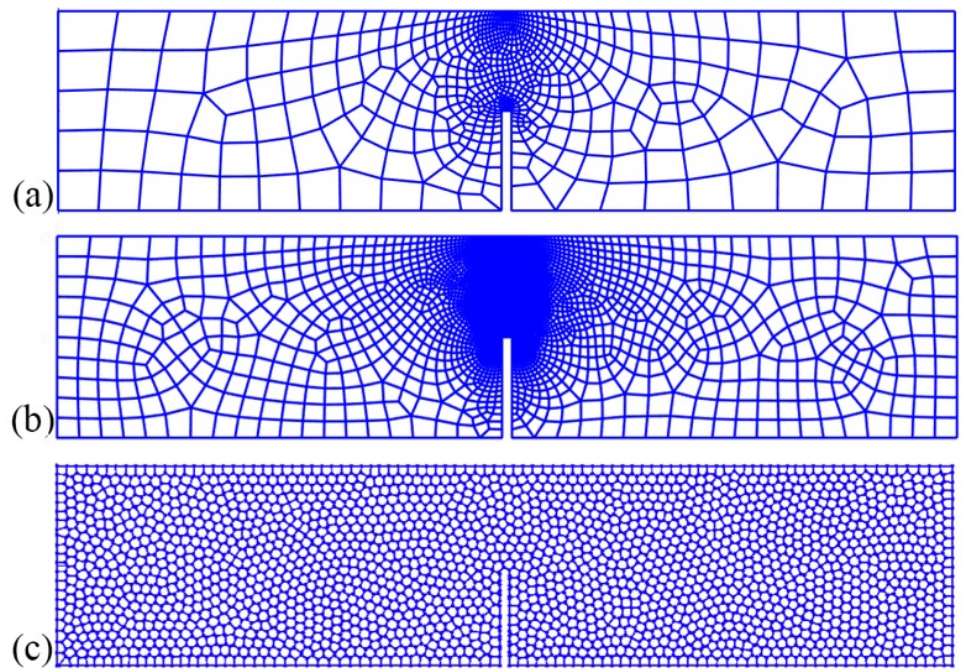
Bảng 3: Thông số vật liệu cho bài toán tấm chữ L²⁰

E	ν	k	f_t	λ	G_f
25850 MPa	0.18	10	2.7	0.8	95 N/m

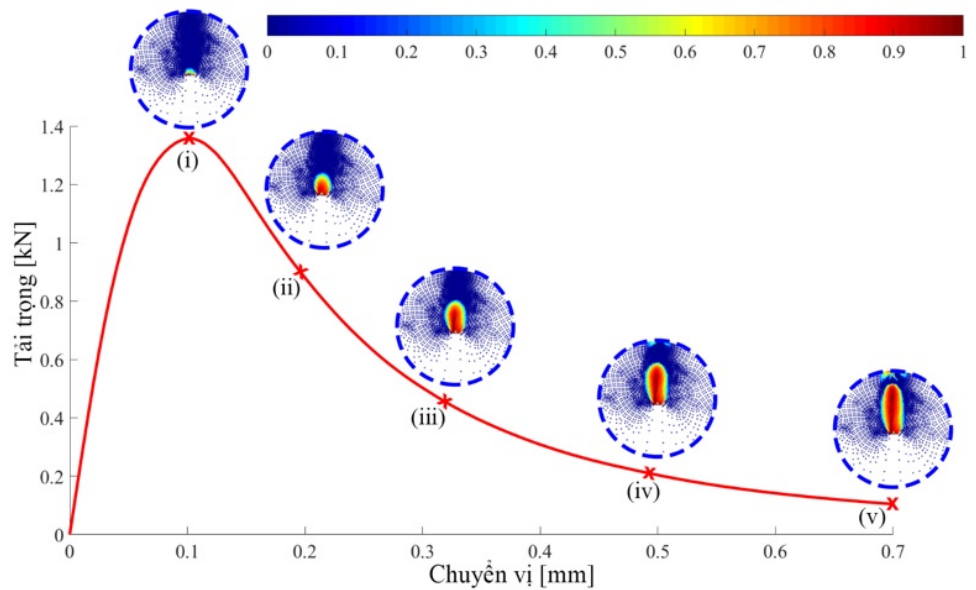


Vấn đề này sẽ được khảo sát trong các nghiên cứu tiếp theo. Ở Hình 14, hai cách định hướng phần tử khác nhau (trong khu vực lưới mịn) được khảo sát. Với Hình 14a, các phần tử định hướng tự do; còn với Hình 14b, các phần tử được sắp xếp trật tự và có kích thước tương đối đều nhau. Kết quả dự đoán vùng nứt được trình bày ở Hình 15, so sánh với vùng nứt trong thực nghiệm²¹. Theo thực nghiệm, vết nứt hình thành và phát triển từ góc chữ L (vị trí tập trung ứng suất, có xu hướng phát triển lệch lên khoảng 45 độ một đoạn rồi đi ngang về phía bên trái. Lưới chia có

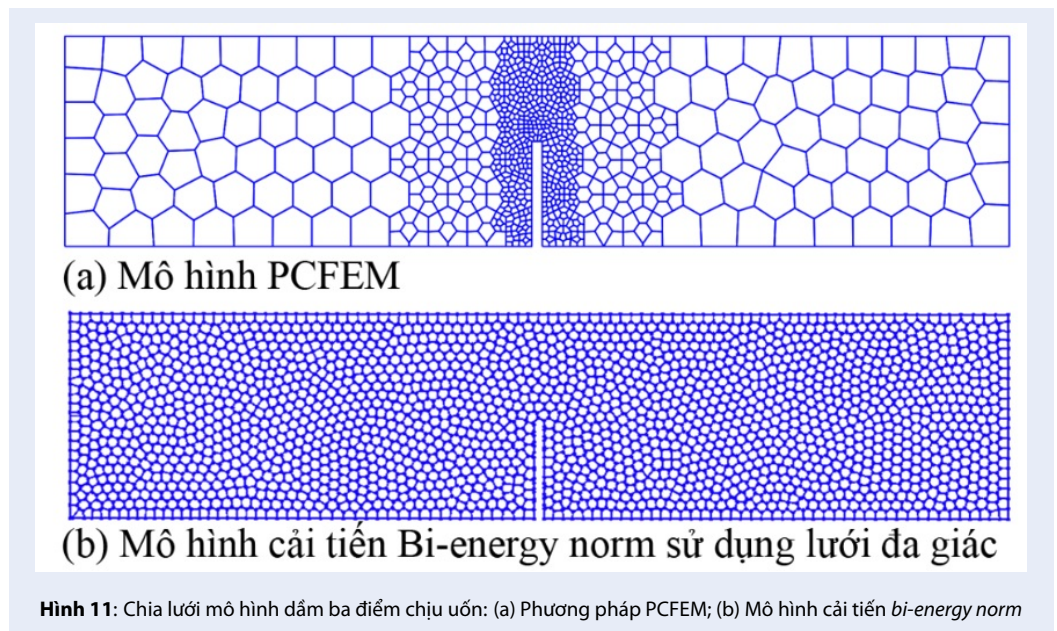
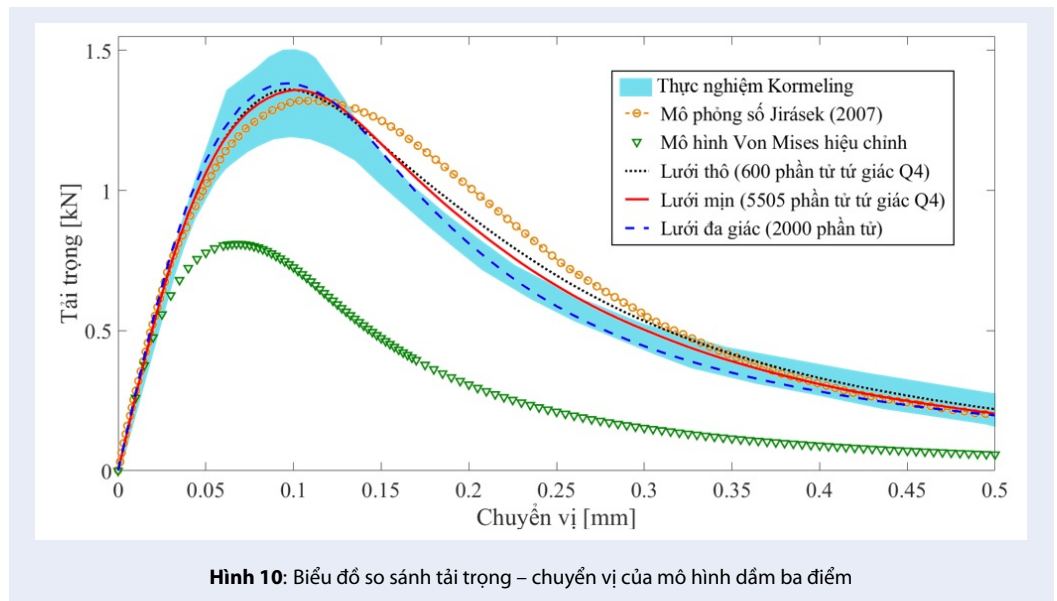
định hướng tự do (hay nói cách khác là không có định hướng) cho dự đoán gần sát với thực nghiệm. Trong khi đó, lưới chia định hướng đều chưa dự đoán tốt giai đoạn phát triển lệch lên, dẫn đến kết quả vết nứt nằm ngang ở vị trí thấp hơn so với thực nghiệm. Hiện tượng này thường được đề cập đến là “sự thiên lệch do lưới” (*mesh-bias*) trong các tài liệu^{22,23}. Việc sử dụng phần tử đa giác bước đầu cho thấy có thể giúp giảm hiện tượng này, được minh chứng ở Hình 16, khi kết quả dự đoán của lưới đa giác (1600 phần tử) gần với thực nghiệm. Theo tài liệu tham khảo của Jirásek và



Hình 8: Chia lưới mô hình dầm ba điểm chịu uốn: (a) Lưới phần tử tứ giác chia thô; (b) Lưới phần tử tứ giác chia mịn; (c) Lưới phần tử đa giác



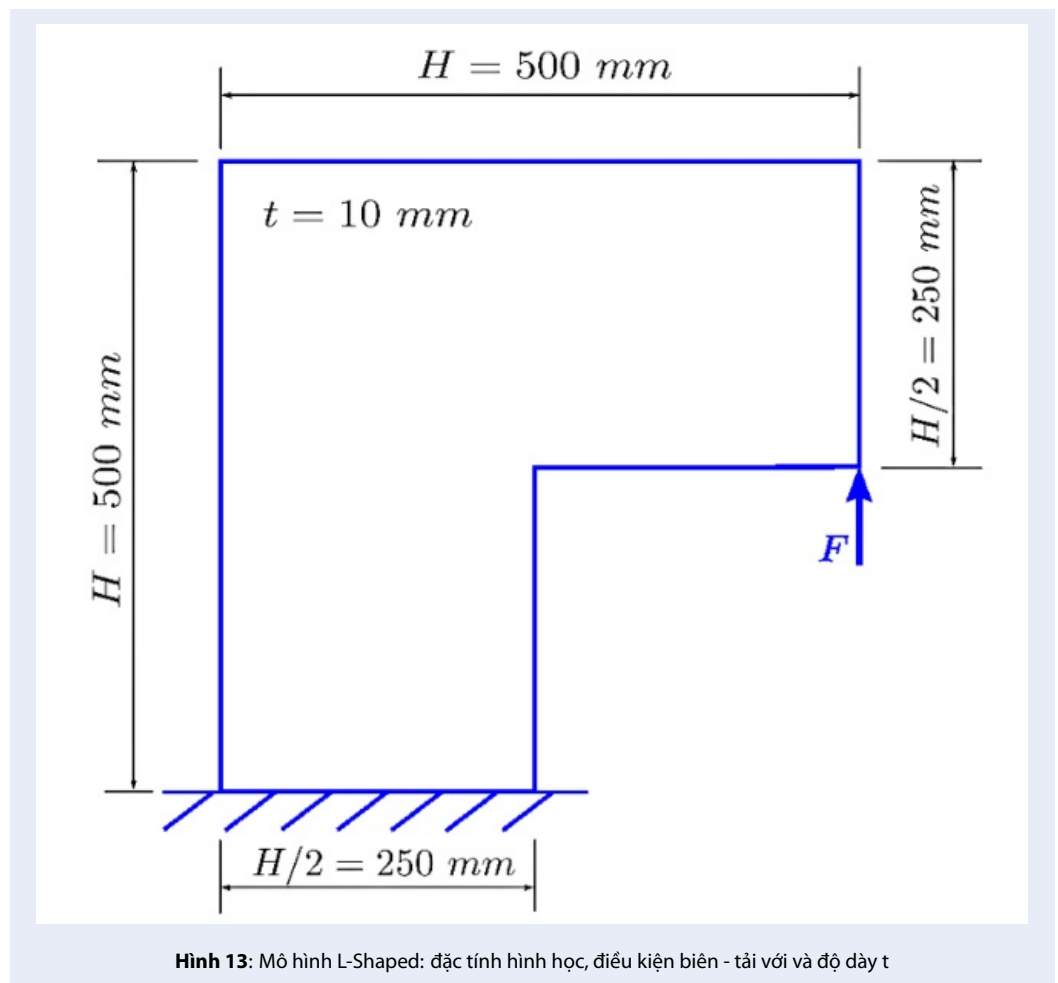
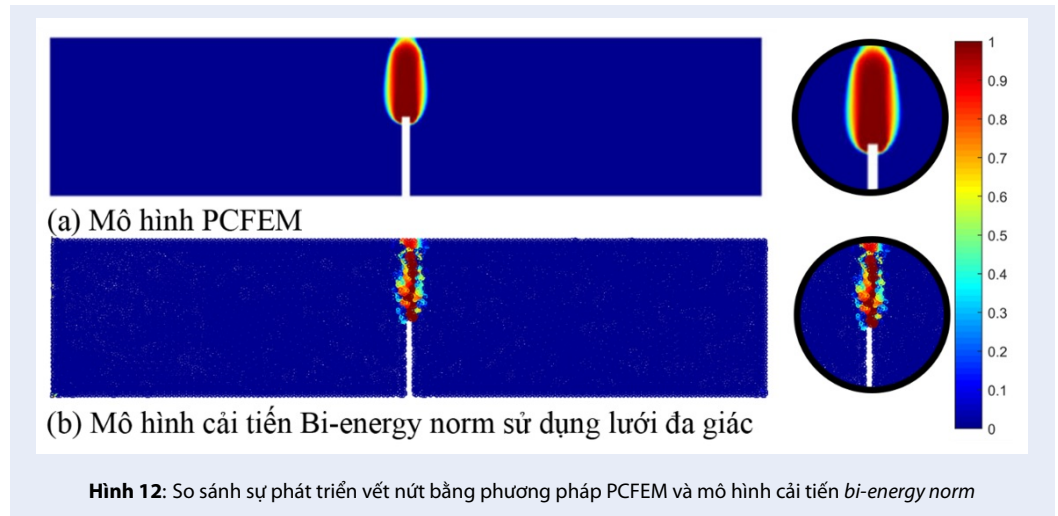
Hình 9: Sự phát triển vết nứt khi tăng tải của mô hình uốn dầm lớn chịu uốn ba điểm

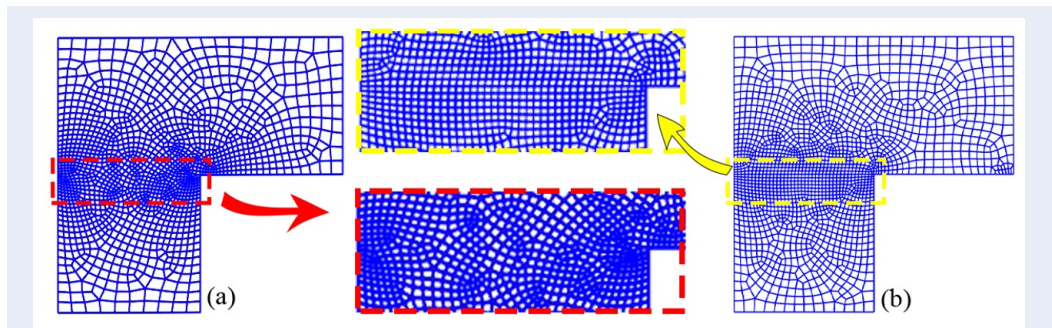


cs.²², hiện tượng mesh-bias ở phần tử tứ giác được biểu hiện rõ khi chia lưới có cấu trúc (tức là lưới phần tử được sắp xếp có trật tự). Trong khi đó, lưới phần tử đa giác có xu hướng không có cấu trúc, phần nào do phần tử đa giác có nhiều cạnh hơn so với phần tử tứ giác. Mặt khác, mô hình phá hoại cục bộ được đề xuất trong bài báo này không sử dụng các công thức tường minh để xác định hướng phát triển vết nứt. Thay vào đó, sự phát triển của vùng phá hoại được dựa vào các phương trình trạng thái như phương trình tính biến dạng tương đương (phương trình (6)) và phương trình tính đại lượng đặc trưng hư hại theo biến dạng

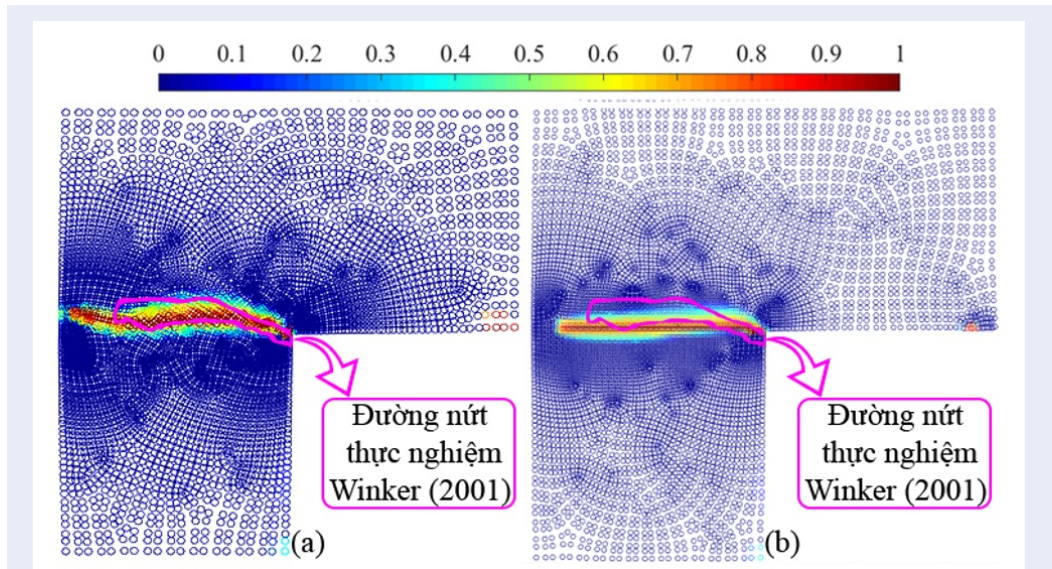
tương đương (phương trình (2)). Trong đó, biến dạng tương đương được tính từ giá trị biến dạng. Việc phần tử đa giác có độ chính xác cao hơn khi xấp xỉ trường đạo hàm (như ứng suất và biến dạng)^{16,17} cũng góp vai trò nhất định trong nâng cao khả năng dự đoán sự phát triển của vùng phá hoại.

Đồ thị tải – chuyển vị được trình bày ở Hình 17, một lần nữa cho thấy kết quả của việc sử dụng lưới tứ giác mịn, thô hay đa giác không có khác biệt lớn, tương tự như ghi nhận ở ví dụ trước. Và một lần nữa, việc sử dụng biến dạng tương đương theo mô hình von Mises hiệu chỉnh cho kết quả dự đoán giá trị tải lớn





Hình 14: Chia lưới mô hình tấm chữ L: (a) Lưới tứ giác chia tự do (1600 phần tử Q4); (b) Lưới tứ giác chia đều (1600 phần tử Q4)



Hình 15: Kết quả đường nứt mô hình tấm chữ L: (a) Lưới chia tự do; (b) Lưới chia đều đã xác định sai chiều hướng phát triển vết nứt do chia lưới phần tử

nhất thấp hơn nhiều so với thực nghiệm. Trong khi đó, khi sử dụng biến dạng tương đương theo mô hình *bi-energy*, kết quả phù hợp tốt với thực nghiệm.

Ghi chú : hai vấn đề cần được phân biệt. Đường cong tải - chuyển vị phụ thuộc hay không vào kiểu phần tử và mật độ lưới chia được gọi là « sự phụ thuộc của kết quả vào lưới » (*mesh-dependency*). Việc dự đoán hướng phát triển vết nứt phụ thuộc hay không vào sự định hướng của phần tử được gọi là « sự thiên lệch hướng vết nứt do lưới » (*mesh-bias*). Sử dụng mô hình hư hại cục bộ cải tiến giúp giải quyết vấn đề *mesh-dependency*. Trong khi đó, vấn đề *mesh-bias* sẽ được giảm thiểu với phần tử đa giác.

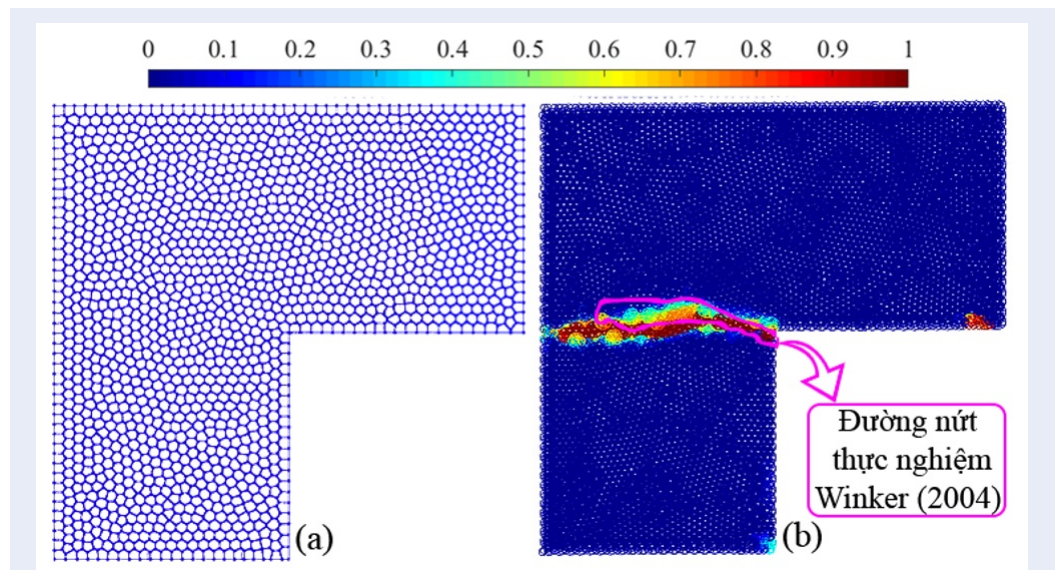
KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, mô hình phá hoại cục bộ cải tiến cho vật liệu bán giòn từ tài liệu⁷ tiếp tục được mở rộng với hai đề xuất:

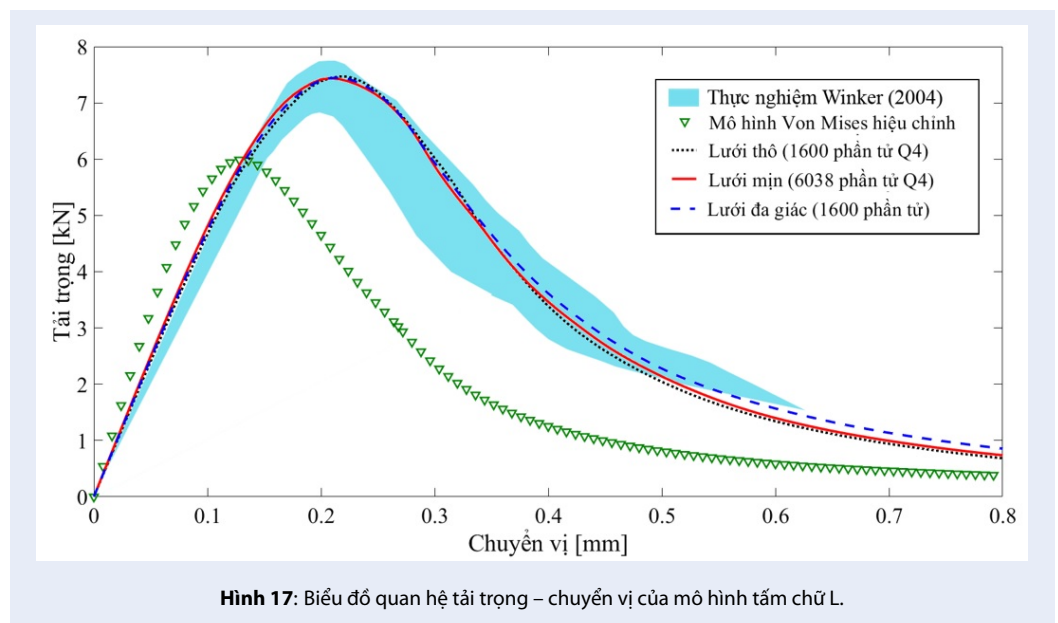
- i) Sử dụng biến dạng tương đương theo mô hình *bi-energy*, thay vì mô hình von Mises hiệu chỉnh.
- ii) Sử dụng phần tử hữu hạn đa giác, thay vì các phần tử thông thường như tứ giác hay tam giác.

Thông qua so sánh với thực nghiệm và các phương pháp số khác, có thể thấy được hiệu quả thu được của mô hình đề xuất như sau :

- i) Mô hình biến dạng tương đương theo *bi-energy* cho kết quả dự đoán đường cong tải-chuyển vị phù hợp với thực nghiệm hơn mô hình von Mises hiệu chỉnh.
- ii) Mô hình hư hại cục bộ cải tiến không bị ảnh hưởng nhiều bởi lưới phần tử (cả về loại phần tử và kích



Hình 16: Mô hình tấm chữ L sử dụng lưới đa giác: (a) Chia lưới phần tử đa giác; (b) Kết quả đường nứt so với thực nghiệm



Hình 17: Biểu đồ quan hệ tải trọng – chuyển vị của mô hình tấm chữ L.

thước lưới chia).

iii) Bề rộng vết nứt có xu hướng nhỏ hơn (tức là gần với thực tế hơn) so với mô hình phi cục bộ.

iv) Phần tử đa giác có thể giúp giảm số lượng phần tử (và số lượng nút), trong khi vẫn đảm bảo độ chính xác. Phần tử đa giác còn có tiềm năng giảm ảnh hưởng của hiện tượng *mesh-bias*.

v) Lưới chia mịn giúp thu được hình ảnh vết nứt mảnh hơn so với lưới chia thô. Tuy nhiên lưới chia mịn không phải là yêu cầu bắt buộc.

Hướng mở rộng tiếp theo của mô hình là các bài toán ba chiều. Mặt khác, trong thực tế hướng phát triển của vết nứt thường không biết trước. Do đó, cần áp dụng kỹ thuật chia lưới đáp ứng, tức là lưới sẽ được làm mịn cục bộ ở vùng lân cận vết nứt (vùng có giá trị hư hại cao). Đây là một nhiệm vụ khó khăn đối với phần tử hữu hạn thông thường, do các yêu cầu về dạng hình học (phần tử phải có dạng hình lồi, kích thước các cạnh chênh lệch không quá lớn để hạn chế sai số). Ngược lại, phần tử đa giác có sự linh hoạt cao

hơn, do đó sẽ phù hợp hơn để chia lưới đáp ứng. Với cùng số lượng phần tử, lưới phần tử đa giác đòi hỏi nhiều thời gian tính toán hơn so với lưới phần tử tứ giác. Tuy nhiên, với những lợi ích mà phần tử đa giác có thể mang lại (như giảm hiện tượng mesh-bias và sự linh hoạt khi chia lưới đáp ứng), loại phần tử này vẫn có nhiều tiềm năng để nghiên cứu áp dụng vào các mô hình tính toán số phân tích hư hại của vật liệu bán giòn.

LỜI CẢM ƠN

Nhóm tác giả cảm ơn sự hỗ trợ về thời gian và trang thiết bị của Trường Đại học Bách khoa, ĐHQG-HCM và Trường Đại học Duy Tân trong quá trình thực hiện bài báo này.

XUNG ĐỘT LỢI ÍCH

Nhóm tác giả cam đoan rằng không có bất kỳ xung đột lợi ích nào trong công bố bài báo.

ĐÓNG GÓP CỦA CÁC TÁC GIẢ

Trần Như Quân đã thực hiện thu thập dữ liệu, mô hình, lập trình tính toán, trình bày kết quả và viết bài báo. Nguyễn Ngọc Minh, Bùi Quốc Tính, Hồ Đức Duy đã đề xuất ý tưởng nghiên cứu, kiểm tra và chỉnh sửa bản thảo bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Kachanov LM, Krajcinovic D. Introduction to continuum damage mechanics. *J Appl Mech.* 1987;54(2):481;Available from: <https://doi.org/10.1115/1.3173053>.
- Peerlings RHJ, De Borst R, Brekelmans WAM, De Vree JHP. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int J Numer Methods Eng.* 1996;39(19):3391-403;Available from: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19961015\)39:19<3391::AID-NME7>3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961015)39:19<3391::AID-NME7>3.0.CO;2-D).
- Bonges G. A stress-based gradient-enhanced damage model; 2011.
- Miehe C, Hofacker M, Welschinger F. A phase field model for rate-independent crack propagation: robust algorithmic implementation based on operator splits. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2010;199(45-48):2765-78;Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.04.011>.
- Miehe C, Welschinger F, Hofacker M. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: variational principles and multi-field FE implementations. *Int J Numer Methods Eng.* 2010;83(10):1273-311;Available from: <https://doi.org/10.1002/nme.2861>.
- Borst R, Verhoosel CV. Gradient damage vs phase-field approaches for fracture: similarities and differences. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2016;312:78-94;Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.05.015>.
- Kurumatani M, Terada K, Kato J, Kyoya T, Kashiya K. An isotropic damage model based on fracture mechanics for concrete. *Eng Fract Mech.* 2016;155:49-66;Available from: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.01.020>.

- Nguyen THA, Bui TQ, Hirose S. Smoothing gradient damage model with evolving anisotropic nonlocal interactions tailored to low-order finite elements. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2018;328:498-541;Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.019>.
- Wachspress EL, Rohde SM. A rational finite element basis. *J Lubr Technol.* 1976;98(4):635-;Available from: <https://doi.org/10.1115/1.3452953>.
- Sukumar N, Malsch EA. Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants. *Arch Comp Methods Eng.* 2006;13(1):129-63;Available from: <https://doi.org/10.1007/BF02905933>.
- Talischi C, Paulino GH, Pereira A, Menezes IFM. PolyMesher: A general-purpose mesh generator for polygonal elements written in MATLAB. *Struct Multidiscip Optim.* 2012;45(3):309-28;Available from: <https://doi.org/10.1007/s00158-011-0706-z>.
- Huynh HD, Nguyen MN, Cusatis G, Tanaka S, Bui TQ. A polygonal XFEM with new numerical integration for linear elastic fracture mechanics. *Eng Fract Mech.* 2019;213:241-63;Available from: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.04.002>.
- Vree JHP, Brekelmans WAM, van Gils MAJ. Comparison of non-local approaches in continuum damage mechanics. *Comput Struct.* May 1995;55(4):581-8;Available from: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)00501-S](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00501-S).
- Jirásek M, Patzák B. Consistent tangent stiffness for nonlocal damage models. *Comput Struct.* 2002;80(14-15):1279-93;Available from: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(02\)00078-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00078-0).
- Chi H, Talischi C, Lopez-Pamies O, Paulino HG. Polygonal finite elements for finite elasticity. *Int J Numer Methods Eng.* 2015;101(4);Available from: <https://doi.org/10.1002/nme.4802>.
- Huynh HD, Natarajan S, Nguyen-Xuan H, Zhuang X. Polytopal composite finite elements for modeling concrete fracture based on nonlocal damage models. *Comput Mech.* 2020;66(6):1257-74;Available from: <https://doi.org/10.1007/s00466-020-01898-y>.
- Sukumar N, Tabarraei A. Conforming polygonal finite elements. *Int J Numer Methods Eng.* 2004;61(12):2045-66;Available from: <https://doi.org/10.1002/nme.1141>.
- Kormeling H, Reinhardt H. Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete. *Delft Univ Technol.* 1983:5-83.
- Jirásek M. Nonlocal damage mechanics. *Rev Eur Génie Civ.* 2007;11(7-8):993-1021;Available from: <https://doi.org/10.3166/regc.11.993-1021>.
- Winkler B, Hofstetter G, Lehar H. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *Int J Numer Anal Meth Geomech.* 2004;28(78):797-819;Available from: <https://doi.org/10.1002/nag.362>.
- Bishop JE. Simulating the pervasive fracture of materials and structures using randomly close packed Voronoi tessellations. *Comput Mech.* 2009;44(4):455-71;Available from: <https://doi.org/10.1007/s00466-009-0383-6>.
- Jirásek M, Grassl P. Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models. *Eng Fract Mech.* 2008;75(8):1921-43;Available from: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.11.010>.
- Leon SE, Spring DW, Paulino GH. Reduction in mesh bias for dynamic fracture using adaptive splitting of polygonal finite elements. *Int J Numer Methods Eng.* 2014;100(8):555-76;Available from: <https://doi.org/10.1002/nme.4744>.

Regularized local damage model for quasi-brittle material

Nhu Quan Tran^{1,2}, Ngoc Minh Nguyen^{3,4}, Quoc Tinh Bui^{3,4,*}, Duc Duy Ho^{1,2,*}



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

ABSTRACT

This paper presents an improved local damage model for quasi-brittle materials. A parameter, namely *damage*, in the range [0,1] is used to characterize the material from intact state to complete failure. Classical local damage model is known for low computational cost but it suffers from numerical issues such as difficult convergence and mesh-density-dependent results. Various non-local models have therefore been proposed, however the computational cost is increased, which hinders the applicability in practical problems. Furthermore, the width of the damage zone predicted by the non-local models is usually non-physically large. Here, the improvement is the introduction of the fracture energy and element-size into the calculation of damage parameters to mitigate the weakness of the local damage model, while keeping low computational cost. The employment of polygonal element is also proposed to utilize the advantage of high-accuracy, thus less number of elements (than the usual 3-node triangular or 4-node quadrilateral elements) can be used. The bi-energy norm-based equivalent strain is for the first time considered in a local damage model. This quantity is based on the maximum strain criterion, but with a modification to take into account the property of quasi-brittle materials such as concrete, limestone, etc., that load capacity in compression is higher than in tension. Accuracy and efficiency of the proposed model is investigated through comparison with reference results from experiments and other numerical methods.

Key words: Improved local damage model, bi-energy norm, quasi-brittle material, polygonal element

¹Faculty of Civil Engineering, Ho Chi Minh City University of Technology (HCMUT), 268 Ly Thuong Kiet Street, District 10, Ho Chi Minh City, Vietnam

²Vietnam National University Ho Chi Minh City, Thu Duc City, Ho Chi Minh City, Vietnam

³Duy Tan Institute for Computational Engineering (DTRICE), Duy Tan University, Ho Chi Minh City, Vietnam

⁴Faculty of Civil Engineering, Duy Tan University, Da Nang, Vietnam

Correspondence

Quoc Tinh Bui, Duy Tan Institute for Computational Engineering (DTRICE), Duy Tan University, Ho Chi Minh City, Vietnam

Faculty of Civil Engineering, Duy Tan University, Da Nang, Vietnam

Email: tinh.buiquoc@gmail.com

Correspondence

Duc Duy Ho, Faculty of Civil Engineering, Ho Chi Minh City University of Technology (HCMUT), 268 Ly Thuong Kiet Street, District 10, Ho Chi Minh City, Vietnam

Vietnam National University Ho Chi Minh City, Thu Duc City, Ho Chi Minh City, Vietnam

Email: hoducduy@hcmut.edu.vn

Cite this article : Tran N Q, Nguyen N M, Bui Q T, Ho D D. **Regularized local damage model for quasibrittle material.** *Sci. Tech. Dev. J. – Engineering and Technology*; 2023, 6(1):1772-1785.