

# Nghiên cứu ứng dụng phân tích đẳng hình học cho bài toán điều khiển chủ động kết cấu tấm vật liệu phân lớp chức năng với tấm kích điện làm từ vật liệu áp điện

Nguyễn Duy Khương<sup>1,\*</sup>, Nguyễn Mạnh Tiến<sup>1</sup>, Nguyễn Xuân Hùng<sup>2</sup>, Vũ Công Hòa<sup>1</sup>



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

## TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu này áp dụng phân tích đẳng hình học (Isogeometric analysis - IGA) để mô phỏng điều khiển chủ động cho kết cấu dạng tấm làm từ vật liệu phân lớp chức năng (Functionally graded material - FGM) bằng các tấm vật liệu áp điện (Piezoelectric). Việc điều khiển này giúp làm giảm độ võng của tấm khi chịu tác dụng của tải tĩnh giúp kết cấu có khả năng chịu tải cao hơn. Phương pháp IGA được xây dựng trên nền tảng hàm NURBS (Non-uniform rational basis spline) có nhiều ưu điểm như: mô tả hình học chính xác bằng cách xấp xỉ bằng cách hàm bậc cao và dùng trực tiếp hàm dạng này cho công đoạn tính toán. Hơn nữa, hình học NURBS có sự linh hoạt của lưới và sự liên tục bậc cao giữa các phần tử làm cho bài toán có kết quả chính xác cao. Mô hình ba chiều cho kết cấu dạng tấm gồm lớp trên và lớp dưới được làm từ vật liệu áp điện, lớp giữa được làm từ vật liệu phân lớp chức năng. Các kết quả được sẽ kiểm chứng với những công bố trước đó để chứng minh tính hiệu quả của phương pháp cho loại bài toán này. Qua các kết quả thu được cho thấy rằng, IGA sử dụng hiệu quả cho loại bài toán điều khiển chủ động bằng các tấm áp điện nhằm giảm chuyển vị của tấm vật liệu phân lớp chức năng. Việc hiệu quả thể hiện khi dùng số lượng bậc tự do ít nhưng vẫn đảm bảo được lời giải có kết quả chính xác khi so sánh với lời giải tham khảo.

**Từ khóa:** Phân tích đẳng hình học, vật liệu phân lớp chức năng, phần tử áp điện

## GIỚI THIỆU

Phân tích đẳng hình học (Isogeometric Analysis – IGA) là sự kết hợp giữa thiết kế với hỗ trợ máy tính (Computer Aided Design-CAD) và phân tích phần tử hữu hạn (Finite Element Analysis-FEA) được đề xuất bởi Hughes<sup>1</sup>. Phương pháp đẳng hình học (IGA) sử dụng hàm cơ sở Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) do đó phương pháp này có thể sử dụng trực tiếp dữ liệu từ CAD để mô tả chính xác hình học và cho lời giải sắp xỉ. Ngoài các lợi thế trên, Phân tích đẳng hình học (IGA) còn có thể tăng hay giảm bậc của lưới rất hiệu quả và kiểm soát được độ liên tục của phần tử một cách linh hoạt.

Vật liệu phân lớp chức năng (Functionally Graded Materials - FGM) lần đầu tiên được tìm ra bởi một nhóm nhà khoa học người Nhật Bản năm 1984<sup>2</sup>, vật liệu phân lớp chức năng được kết hợp từ kim loại và sứ nên cơ tính của vật liệu thay đổi liên tục giữa các lớp và ưu điểm của FGM thể hiện ở tính dẻo của kim loại và tính cách nhiệt cách điện của sứ. Sự kết hợp vật liệu phân lớp chức năng với vật liệu áp điện sẽ tạo ra vật liệu thông minh có thể ứng dụng vào các ngành công nghiệp như: sản xuất các cảm biến cho ô tô, các thiết bị giám sát chủ động...

Hiện tại đã có nhiều nhóm tác giả sử dụng các phương pháp số khác nhau để nghiên cứu về kết cấu làm bằng vật liệu phân lớp chức năng có phần tử áp điện. Nhóm tác giả X.Q.He và cộng sự đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method-FEM) dựa trên lý thuyết tấm cổ điển (Classical Plate Theory - CPT) để phân tích điều khiển dao động chủ động cho mô hình tấm vật liệu phân lớp chức năng có phần tử áp điện đóng vai trò lần lượt lớp kích động (Actuator) và lớp cảm biến (Sensor)<sup>3</sup>. Nhóm tác giả K. Nguyen-Quang, H. Dang-Trung, V. Ho-Huu, H. Luong-Van, T. Nguyen-Thoi đã sử dụng phương pháp Cell-based Smoothed Discrete Shear Gap Method – CS-DSG để phân tích điều khiển chủ động cho tấm vật liệu phân lớp chức năng có tích hợp lớp cảm biến và kích động<sup>4</sup>. Tác giả Alibeigloo đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích tĩnh cho mô hình tấm tròn làm bằng vật liệu phân lớp chức năng có phần tử áp điện<sup>5</sup>.

Bài báo này tập trung nghiên cứu ứng dụng phân tích đẳng hình học cho các bài toán điều khiển chủ động của các kết cấu dạng tấm dùng vật liệu phân lớp chức năng với tấm áp điện. Bài báo này trình bày như sau: phần tiếp theo mô tả chi tiết hơn về vật liệu phân lớp

<sup>1</sup>Trường Đại học Bách khoa, ĐHQG-HCM

<sup>2</sup>Trường Đại học Công nghệ TP.HCM

### Liên hệ

**Nguyễn Duy Khương**, Trường Đại học Bách khoa, ĐHQG-HCM

Email: ndkhuong@hcmut.edu.vn

### Lịch sử

- Ngày nhận: 29-3-2019
- Ngày chấp nhận: 14-5-2019
- Ngày đăng: 31-12-2019

DOI :10.32508/stjdet.v2iS12.493



### Bản quyền

© ĐHQG Tp.HCM. Đây là bài báo công bố mở được phát hành theo các điều khoản của the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



**Trích dẫn bài báo này:** Khương N D, Tiến N M, Hùng N X, Hòa V C. Nghiên cứu ứng dụng phân tích đẳng hình học cho bài toán điều khiển chủ động kết cấu tấm vật liệu phân lớp chức năng với tấm kích điện làm từ vật liệu áp điện. *Sci. Tech. Dev. J. - Eng. Tech.*; 2(S12):S163-S173.

chức năng và vật liệu áp điện cũng như phương pháp đẳng hình học, kết quả số thể hiện ở phần kế tiếp và cuối cùng sẽ là phần kết luận.

## CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

### Phương pháp đẳng hình học

Các công thức trong phần này được tham khảo từ tài liệu<sup>6</sup>.

### Knot véctơ

Véctơ knot là một tập số thực không giảm trong không gian tham số được viết  $knot = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ , trong đó  $\xi_i \in \mathbb{R}$  là knot thứ  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+p+1$  là chỉ số của véctơ knot,  $p$  là bậc của B-Spline,  $n$  là số hàm cơ sở sử dụng để xây dựng B-Spline. Hàm cơ sở B-Spline liên tục  $C^\infty$  trong khoảng knot  $[\xi_i, \xi_{i+1})$  và liên tục  $C^{p-1}$  trong knot riêng biệt. Một giá trị knot có thể xuất hiện nhiều hơn một lần và số lần giá trị knot xuất hiện trong knot vector được gọi là bội của knot đó. Cụ thể tại một knot có bội là  $k$  thì độ liên tục  $C^{p-k}$ .

### Hàm cơ sở

Hàm cơ sở B-spline  $N_{i,p}(\xi)$  được định nghĩa công thức đệ quy Cox-de Boor được biểu diễn như sau:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i,p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i,p+1} - \xi}{\xi_{i,p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

### Đường cong B-Spline và NURBS

Đường cong B-Spline và NURBS bậc  $p$  lần lượt được biểu diễn như sau:

$$C_B(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (3)$$

$$C_N(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) B_i \quad (4)$$

Trong đó

$N_{i,p}$  là hàm cơ sở B-Spline với  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$B_i$  là các điểm điều khiển.

$R_i^p$  là hàm cơ sở NURBS và  $R_i^p$  được biểu diễn như sau:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (5)$$

### Khối B-Spline và Khối NURBS

Khối B-Spline và NURBS lần lượt được biểu diễn như sau:

$$S_B(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k} \quad (6)$$

$$S_N(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) B_{i,j,k} \quad (7)$$

Trong đó

$N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta)$  là hàm cơ sở B-Spline.

$B_{i,j,k}$  là tọa độ các điểm điều khiển  $m \times n \times l$ .

$R_{i,j,k}^{p,q,r}$  là hàm cơ sở NURBS và  $R_{i,j,k}^{p,q,r}$  được biểu diễn như sau:

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}} \quad (8)$$

### Vật liệu phân lớp chức năng (FGM)

Vật liệu lớp chức năng (FGM) là vật liệu composite có vi cấu trúc không đồng nhất mà thay đổi liên tục về cơ tính giữa các lớp vật liệu. Vật liệu FGM được kết hợp từ kim loại và sứ nên nó có ưu điểm là kết hợp được cả tính dẻo của kim loại và tính cách nhiệt cách điện của sứ. FGM được sử dụng trong các ngành công nghiệp hiện đại như: hàng không vũ trụ, công nghệ hạt nhân, truyền thông, năng lượng, cơ khí...

Hàm thuộc tính vật liệu được biểu diễn như sau:

$$P(z) = (P_m - P_c) \times V_f(z) + P_c \quad (9)$$

Trong đó:  $P_c$ ,  $P_m$  là thuộc tính vật liệu của sứ và kim loại lần lượt ở mặt dưới và mặt trên. Với  $V_f(z)$  là hàm vị trí theo bề dày tấm.

$$V_f(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (10)$$

Trong đó:  $z$  là chiều sâu phân lớp vật liệu;  $h$  là chiều dày tấm;  $n$  là số mũ của hàm  $V_f(z)$ .

Ma trận đàn hồi của tấm FGM dựa trên mối quan hệ giữ ứng suất và biến dạng được biểu diễn như sau:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & & & & & \\ C_{12} & C_{22} & & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \text{ Syms} \quad (11)$$

Trong đó:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E \times (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2 \times \nu)}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{E \times \nu}{(1 + \nu)(1 - 2 \times \nu)} \quad (12)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Với  $E$  là mô-đun đàn hồi của vật liệu và  $\nu$  là hệ số Poisson của vật liệu.

**Vật liệu áp điện (Piezoelectric)**

Vật liệu áp điện là vật liệu có khả năng biến đổi từ năng lượng cơ học sang năng lượng điện và ngược lại. Điều này được thể hiện khi tác dụng lực lên vật liệu áp điện sẽ sinh ra dòng điện và ngược lại khi tác động một hiệu điện thế lên vật liệu áp điện sẽ làm cho vật liệu bị biến dạng. Vật liệu áp điện được ứng dụng nhiều trong các lĩnh vực như: cơ khí, y tế, công nghiệp ô tô, công nghệ hàng không...

Phương trình mô tả chuyển động của vật liệu áp điện được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_{bi} - C_s \dot{u}_i &= \rho \ddot{u}_i \\ D_{i,i} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Trong đó  $\sigma_{ij,i}$ ,  $f_{bi}$ ,  $C_s$ ,  $\rho$ ,  $D_{i,i}$  lần lượt là thành phần của tensor ứng suất, ngoại lực, hệ số giảm chấn Rayleigh, khối lượng riêng, những thành phần của véctơ từ thông. Phương trình liên tục của vật liệu áp điện được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{ijk} E_k \\ D_k &= e_{ijk} \epsilon_{ij} + \epsilon_{kj}^S E_l \end{aligned} \tag{14}$$

Trong đó  $\epsilon_{ij}$ ,  $C_{ijkl}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $\epsilon_{kj}^S$  lần lượt thành phần của tensor biến dạng, hằng số đàn hồi, hằng số ứng suất áp điện, hệ số điện môi.

Phương trình biến dạng và trường điện từ được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ E_i &= -\phi_{,i} \end{aligned} \tag{15}$$

Điều kiện biên chuyển vị trên miền  $\Gamma_u$  và  $\Gamma_p$

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \text{ on } \Gamma_u \\ \sigma_{ijn} n_j &= f_{si} \text{ on } \Gamma_p \end{aligned} \tag{16}$$

Điều kiện biên chuyển vị trên miền  $\Gamma_\phi$  và  $\Gamma_q$

$$\begin{aligned} \phi_i &= \bar{\phi}_i \text{ on } \Gamma_\phi \\ D_i n_i &= -q \text{ on } \Gamma_q \end{aligned} \tag{17}$$

Trường chuyển vị và trường điện trong phân tích đẳng hình học được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n R_i u_i \\ \phi &= \sum_{i=1}^n R_i \phi_i \end{aligned} \tag{18}$$

Trong đó  $R_i$  là hàm dạng NURBS.

Dạng yếu của phương trình (13) được biểu diễn trên miền  $\Omega$  được trình bày như sau

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_{bi} - C_s \dot{u}_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i d\Omega dt &= 0 \\ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (D_{i,i}) \delta \phi d\Omega dt &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Từ phương trình dạng yếu theo công thức (19), hệ phương trình tuyến tính được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} [M_{uu}] \{\ddot{u}\} + [C_s] \{\dot{u}\} + [K_{uu}] \{u\} + [K_{u\phi}] \{\phi\} &= \{F_m\} \\ [K_{\phi u}] \{u\} - [K_{\phi\phi}] \{\phi\} &= -\{F_q\} \end{aligned} \tag{20}$$

Trong trường hợp bài toán tĩnh, hệ phương trình tuyến tính (20) được rút gọn thành

$$\begin{aligned} [K_{uu}] \{u\} + [K_{u\phi}] \{\phi\} &= \{F_m\} \\ [K_{\phi u}] \{u\} - [K_{\phi\phi}] \{\phi\} &= -\{F_q\} \end{aligned} \tag{21}$$

Trong đó, các ma trận độ cứng là

$$\begin{aligned} [K_{uu}] &= \int_V [B_u]^T [C] [B_u] dV \\ [K_{u\phi}] &= \int_V [B_u]^T [e]^T [B_\phi] dV \\ [K_{\phi u}] &= \int_V [B_\phi] [e] [B_u] dV \\ [K_{\phi\phi}] &= \int_V [B_\phi]^T [\epsilon]^S [B_\phi] dV \end{aligned} \tag{22}$$

Véc-tơ tải được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned} \{F_m\} &= \int_V [N]^T \{f_b\} dV + \int_{\Gamma_p} [N]^T \{f_s\} d\Gamma \\ \{F_q\} &= \int_{\Gamma_s} [N]^T \{q\} d\Gamma \end{aligned} \tag{23}$$

Các ma trận hàm dạng và ma trận đạo hàm hàm dạng được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned} [N] &= [[N_1] [N_2] \dots [N_i]] \\ [B_u] &= [[B_{u1}] [B_{u2}] \dots [B_{ui}]] \\ [B_\phi] &= [[B_{\phi 1}] [B_{\phi 2}] \dots [B_{\phi i}]] \end{aligned} \tag{24}$$

Với

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix},$$

$$[B_{ui}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{bmatrix}^T,$$

$$[B_{\phi i}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \end{bmatrix},$$

trong đó  $i$  là chỉ số điểm điều khiển của phần tử.

Ma trận vật liệu áp điện và ma trận hằng số điện môi lần lượt được biểu diễn như sau:

$$\begin{aligned} [e] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{25} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [\epsilon^S] &= \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

## KẾT QUẢ SỐ

Trong phần này chúng tôi tiến hành khảo sát mô hình tấm chính làm bằng vật liệu phân lớp chức năng kết hợp với hai tấm dán áp điện ở hai phía của tấm chính. Giả định các tấm này được liên kết với nhau là lý tưởng bằng cách ràng buộc bậc tự do chuyển vị với giá trị bằng nhau tại vị trí liên kết. Trong bài báo này, lớp vật liệu áp điện sẽ được phân tích cặp đôi của trường chuyển vị và trường điện, còn đối với lớp vật liệu phân lớp chức năng chỉ phân tích trường chuyển vị mà không kể đến sự ảnh hưởng của trường điện thế. Các bài toán được phân tích sự ảnh hưởng của điện thế lên chuyển vị của tấm có dán các tấm áp điện bao gồm: Tấm vuông dưới tác động của áp lực phân bố đều khi chưa áp điện (0V); Tấm vuông dưới tác động của áp lực phân bố đều khi áp điện với điện áp 20V và 40V; Tấm vuông dưới tác động của điện áp thay đổi từ 0 đến 60V mà không chịu tác dụng của tải trọng phân bố. Tương tự như phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp đẳng hình học cũng áp đặt điều kiện biên Dirichlet trên  $u$ ,  $v$ ,  $w$  và  $\varphi$  lần lượt là chuyển vị theo  $x$ , chuyển vị theo  $y$ , chuyển vị theo  $z$  và điện thế. Điều kiện biên thường được sử dụng trong bài báo này là ngàm và tựa đơn:

Điều kiện biên ngàm (C-Clamp)

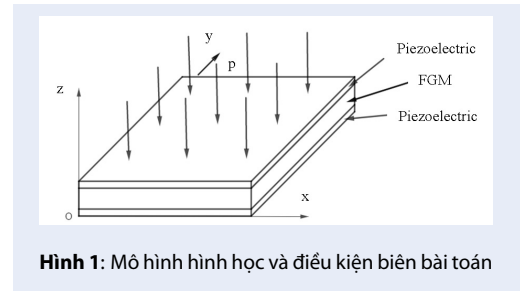
$$u = v = w = 0 \quad (26)$$

Điều kiện biên tựa đơn (S-Simply)

$$\begin{aligned} v = w = 0 \text{ at } x = 0, a \\ u = w = 0 \text{ at } y = 0, a \end{aligned} \quad (27)$$

Mô hình bài toán tấm vuông FGM có phần tử áp điện 400x400 mm cấu tạo lớp trên, lớp dưới làm từ vật liệu áp điện PZT-G1995N và lớp giữa làm từ vật liệu phân lớp chức năng (FGM) Ti-6Al-4V/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Bề dày lớp giữa là 5mm, lớp trên và lớp dưới là 0,1 mm. FGM có quy luật phân bố vật liệu theo phương bề dày  $z$  với số mũ  $n$  lần lượt 0 (Ti-6Al-4V); 0,2; 0,5; 1; 5; 15; ∞ (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) và thông số vật liệu<sup>4</sup> được biểu diễn ở Bảng 1. Điều kiện biên bài toán: CFFF và chịu tải phân bố đều 100 N/m<sup>2</sup>. Mô hình hình học và điều kiện biên được thể hiện ở Hình 1.

Tuy nhiên, khác với cách phân tích bài toán<sup>4</sup> dựa trên lý thuyết tấm FSDT kết hợp phương pháp CSDSG, trong bài báo này chúng tôi thực hiện phân tích bài toán dạng ba chiều với các thông số vật liệu từ Bảng 1 được mô tả cụ thể thông qua các ma trận vật liệu [C],



Hình 1: Mô hình hình học và điều kiện biên bài toán

Bảng 1: Thông Số Vật Liệu Bài Toán

Thông số Vật liệu	Ti-6Al-4V	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	PZT-G1995N
$E(Gpa)$	105,7	320,24	63
$\nu$	0,2981	0,26	0,3
$G(Gpa)$	-	-	24,2
$d_{31}(m/V)$	-	-	$254 \times 10^{-12}$
$d_{32}(m/V)$	-	-	$254 \times 10^{-12}$
$P_{11}(F/m)$	-	-	$15,3 \times 10^{-9}$
$P_{22}(F/m)$	-	-	$15,3 \times 10^{-9}$
$P_{33}(F/m)$	-	-	$15 \times 10^{-9}$

[e],  $[\epsilon^S]$  từ biểu thức (11) và (25) như sau:

$$[C] = \begin{bmatrix} 13,57 & & & & & \\ 36,35 & 13,57 & & & & \\ 36,35 & 36,35 & 13,57 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 24,2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24,2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24,2 \end{bmatrix} \times 10^9 (Pa) \quad \text{syms}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 254 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 254 & 0 \\ 254 & 254 & 254 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-12} (m/V)$$

$$[\epsilon^S] = \begin{bmatrix} 15,3 & 0 & 0 \\ 0 & 15,3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \times 10^{-9} (F/m)$$

Để chọn được mức lưới phù hợp cho bài toán, chúng tôi tiến hành khảo sát giá trị chuyển vị theo phương  $z$  tại điểm có tọa độ  $x = 0,4 m$ ,  $y = 0,2 m$  và  $z = 0,0026 m$  ở các mức lưới như nhau và có bậc lưới lần lượt là bậc 2, bậc 3 và bậc 4 tại  $n = 0$ . Hình 2 mô tả tốc độ hội tụ của lưới IGA bậc 2, bậc 3, bậc 4 so với kết quả chuyển vị theo phương  $z$  của bài báo<sup>4</sup>. Bảng 2 mô tả kết quả của chuyển vị theo phương  $z$  ( $U_z$ ) và sai số (%) tại vị trí khảo sát ứng với nhiều mô hình lưới khác nhau so với giá trị  $U_z = -2,560 \times 10^{-4} m$  được tham khảo trong tài liệu<sup>4</sup>. Từ Hình 2 cho ta thấy rằng, lưới bậc 4 có

tốc độ hội tụ tốt nhất vì với một số lượng bậc tự do như nhau nhưng vẫn cho được kết quả gần nghiệm tham khảo hơn rất nhiều so với lưới bậc 2 và 3. Với số lượng bậc tự do và bậc xấp xỉ phù hợp, khối lượng tính toán của bài toán sẽ giảm đi đáng kể. Đây là ưu điểm của IGA mang lại, vừa linh động trong việc dùng bậc xấp xỉ, vừa linh động trong việc kiểm soát độ mịn của lưới nhằm thu được lời giải xấp xỉ tốt. Vì thế, ở những phân tích sau, mô hình IGA bậc 4 với mức lưới  $12 \times 12 \times 2$  sẽ được sử dụng để đảm bảo được lời giải xấp xỉ chính xác với mức lưới phù hợp.

Kết quả phân bố chuyển vị theo phương  $z$  ứng với  $n = 0,5$  khi sử dụng phân tích đẳng hình học được biểu diễn trong Hình 3. Hình 4 là kết quả so sánh với lời giải tham khảo từ bài báo<sup>4</sup> ứng với các số mũ  $n$  khác nhau của hàm phân bố vật liệu FGM lần lượt là 0 (Ti-6Al-4V); 0,2; 0,5; 1; 5; 15;  $\infty$  ( $Al_2O_3$ ). Qua kết quả Hình 4 cho ta thấy rằng, kết quả thu được từ phân tích đẳng hình học cho kết quả chính xác khi so sánh với kết quả tham khảo từ bài báo<sup>4</sup>. Ở kết quả này, điện thế chưa được áp đặt lên phần tử áp điện. Vì thế, ở phần tiếp theo của bài toán, điện thế sẽ được áp đặt lên các tấm áp điện nhằm khảo sát ảnh hưởng của phần tử áp điện lên biến dạng của kết cấu.

Tiếp theo kết quả trên, chúng tôi tiến hành khảo sát trường hợp các lớp vật liệu áp điện được xem như cơ cấu chấp hành (actuator) bằng cách áp điện lên tấm áp điện. Mô hình hình học của bài toán được sử dụng lại với quy luật phân bố hàm mũ  $n = 0; 0,5; 5; \infty$ . Tấm vẫn chịu tải trọng phân bố đều  $100 \text{ N/m}^2$  và lớp trên được áp điện phân cực thuận, lớp dưới được áp điện phân cực ngược trong hai trường hợp điện áp khác nhau là 20V và 40V để khảo sát ảnh hưởng của điện áp đến độ võng của tấm. Tấm áp điện trên được áp điện thế phân cực thuận bằng cách đặt trực tiếp lên bậc tự do điện thế tại các điểm điều khiển ở mặt tiếp xúc với lớp giữa là 0V và mặt trên ngoài cùng là 20V và 40V. Ngược lại, tấm áp điện dưới được áp điện thế phân cực ngược bằng cách đặt trực tiếp lên bậc tự do điện thế tại các điểm điều khiển ở mặt tiếp xúc với lớp giữa là 0V và mặt trên ngoài cùng là 20V và 40V. Hình 5 mô tả chuyển vị theo phương  $z$  với nhiều quy luật phân bố vật liệu khác nhau tuân theo quy luật hàm lũy thừa lần lượt là  $n = 0; 0,5; 5; \infty$  ứng với các trường hợp của điện thế được áp vào là 0V, 20V và 40V. Bảng 3 mô tả kết quả của chuyển vị theo phương  $z$  tại điểm (0,4; 0,2; 0,0026) cùng với sai số giữa phân tích đẳng hình học (IGA) so với kết quả từ tài liệu<sup>4</sup>. Kết quả Hình 5 cho thấy rằng, tấm FGM ứng với các quy luật phân bố vật liệu khác nhau với các tấm dán áp điện được áp đặt điện áp càng cao thì chuyển vị của tấm càng giảm đáng kể. Điều này chứng tỏ tấm dán áp điện có thể làm giảm chuyển vị của kết cấu dạng tấm. Kết quả này

hứa hẹn cho việc ứng dụng của các tấm áp điện trong các lĩnh vực công nghiệp nhằm hạn chế độ võng của các kết cấu.

**Bảng 3: Kết quả chuyển vị theo phương  $z$  ứng với điện áp 0v, 20v tại điểm (0,4; 0,2; 0,0026) (đv:  $1 \times 10^{-4} \text{ m}$ )**

Số mũ $n$	0V	20V
$n = 0$	-2,5460 <sup>4</sup>	-1,3346 <sup>4</sup>
	-2,4974 [IGA]	-1,3163 [IGA]
Sai số (%)	1,9088	1,3923
$n = 0,5$	-1,6199 <sup>4</sup>	-0,8440 <sup>4</sup>
	-1,5977 [IGA]	-0,8328 [IGA]
Sai số (%)	1,3716	1,3495
$n = 5$	-1,1266 <sup>4</sup>	-0,5820 <sup>4</sup>
	-1,1133 [IGA]	-0,5745 [IGA]
Sai số (%)	1,1843	1,2990
$n = \infty$	-0,8947 <sup>4</sup>	-0,4609 <sup>4</sup>
	-0,8870 [IGA]	-0,4552 [IGA]
Sai số (%)	0,8566	1,2461

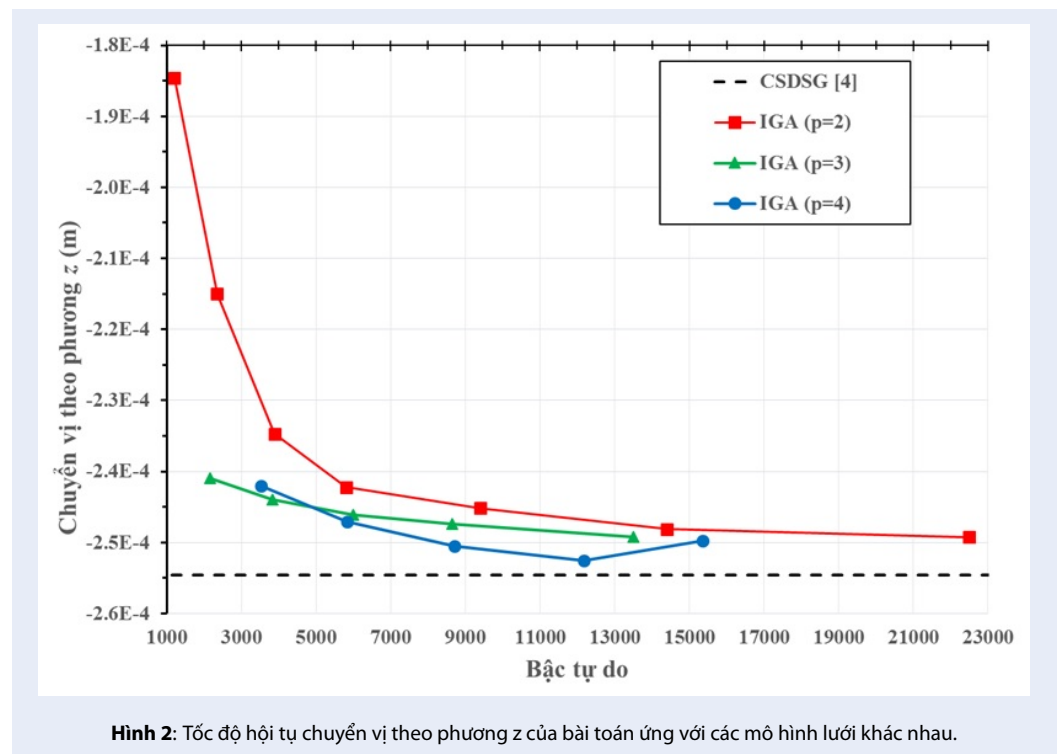
Sau cùng, chúng tôi tiến hành khảo sát độ võng theo phương  $z$  tại điểm (0,4; 0,2; 0,0026) ứng với điều kiện biên CFFF và điểm (0,2; 0,2; 0,0026) ứng với điều kiện SCSC trong các trường hợp điện áp thay đổi từ 0 đến 60V được áp đặt lên các tấm áp điện mà không kể đến ảnh hưởng của lực phân bố lên kết cấu. Các kết quả độ võng được trình bày ở Hình 6 ứng với hai loại điều kiện biên khác nhau là CFFF và SCSC với quy luật phân bố vật liệu  $n = 2$ . Kết quả này cũng được tiến hành so sánh và cho ra kết quả tốt so với kết quả tham khảo từ bài báo<sup>4</sup>. Hình 7 là kết quả phân bố độ võng theo phương  $z$  ứng với các loại điều kiện biên như CFFF và SCSC với điện áp 60V được đặt lên các tấm áp điện ứng với quy luật phân bố vật liệu  $n = 2$ . Kết quả độ võng theo phương  $z$  ứng với nhiều giá trị  $n = 0; 0,5; 5; \infty$  của điểm (0,4; 0,2; 0,0026) được biểu diễn ở Hình 8 a và điểm (0,2; 0,2; 0,0026) được biểu diễn ở Hình 8 b. Qua các kết quả ở Hình 8 a và Hình 8 b chỉ ra rằng, độ võng của tấm phụ có quan hệ tuyến tính với điện áp được áp đặt vào các tấm áp điện phù hợp với các kết luận từ bài báo<sup>4</sup>.

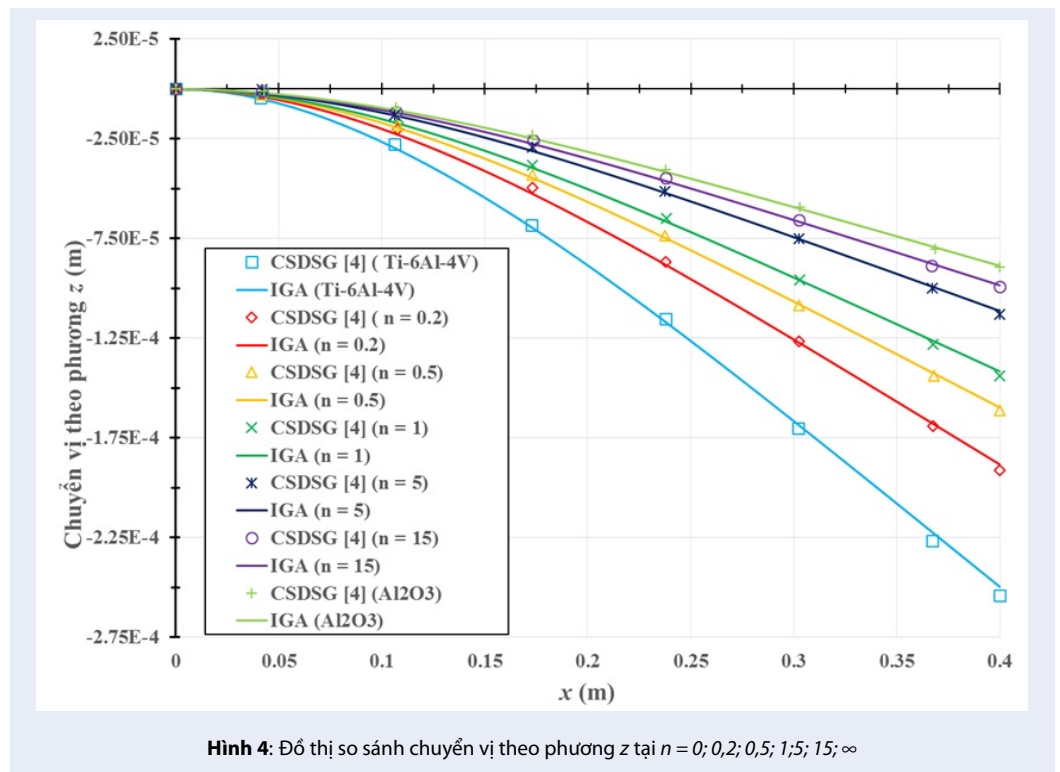
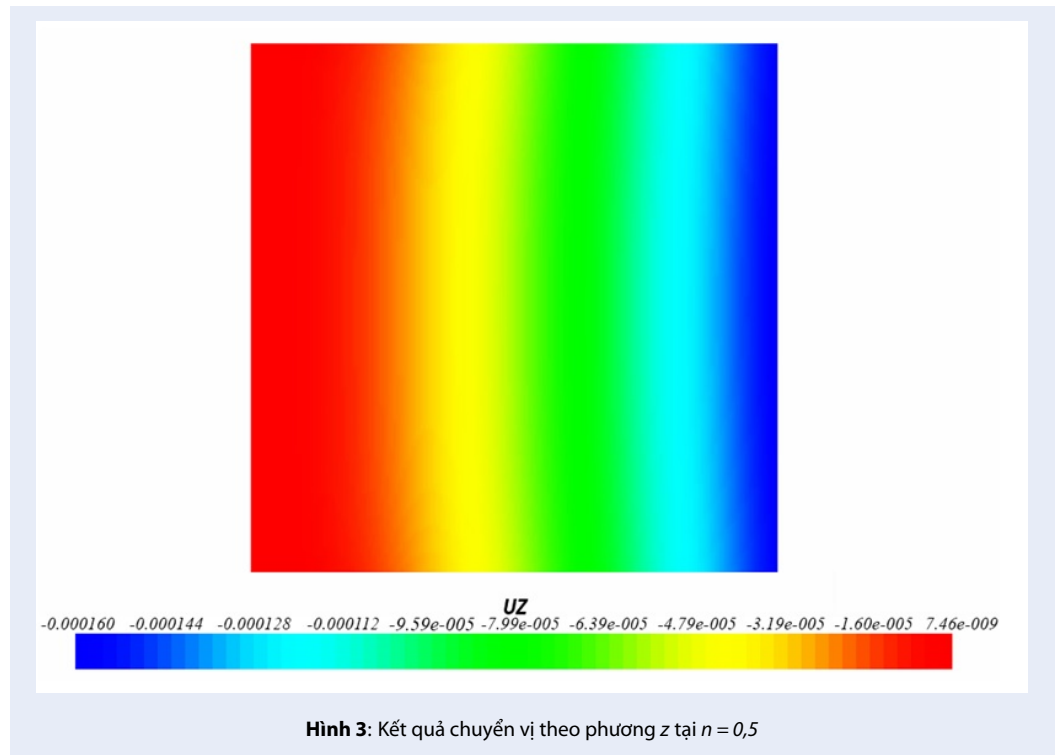
## KẾT LUẬN

Phân tích đẳng hình học dựa vào hàm cơ sở NURBS là công cụ tính toán hiệu quả cho việc phân tích tính cho mô hình vật liệu phân lớp chức năng (FGM) có phần tử áp điện. Qua những kết quả được trình bày ở phần trước, nhóm tác giả nhận thấy rằng IGA là

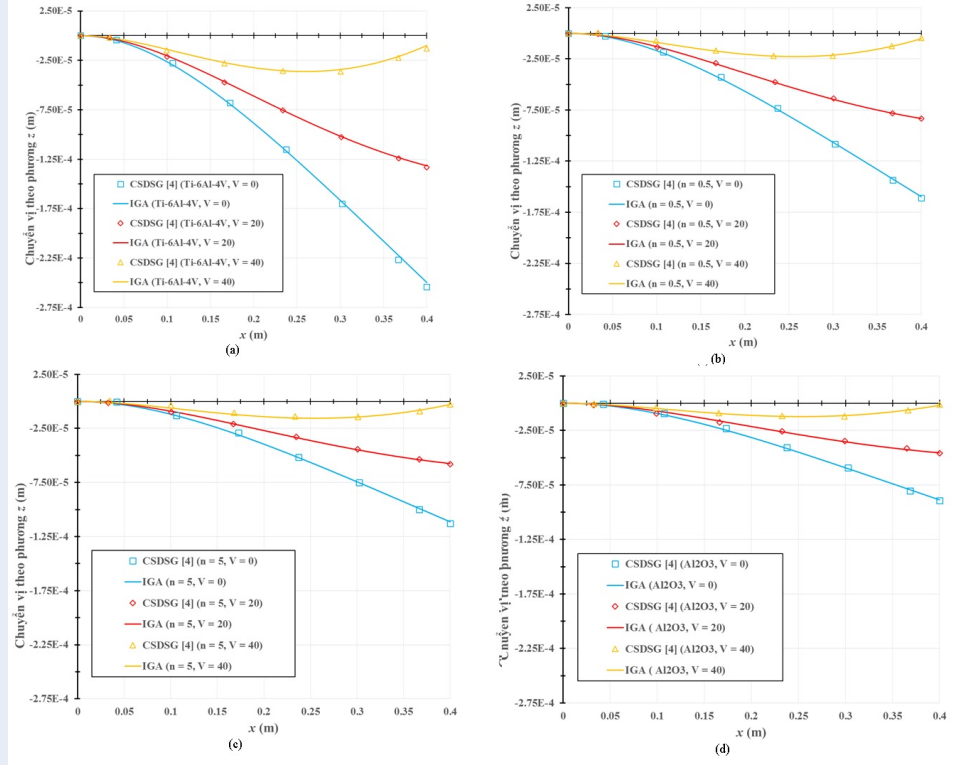
**Bảng 2: Kết quả chuyển vị theo phương z tương ứng với từng mức lưới tại điểm (0,4; 0,2; 0,0026)**

Phương pháp	Mật độ lưới	Bậc tự do	$U_z$ ( $\times 10^{-4}$ m)	Sai số (%)
Bậc 2 - IGA	3x3x2	1200	-1,8463	27,5
	5x5x2	2352	-2,1500	15,6
	7x7x2	3888	-2,3469	7,8
	9x9x2	5808	-2,4223	4,9
	12x12x2	9408	-2,4516	3,7
	18x18x2	14400	-2,4810	2,6
	25x25x2	22500	-2,4928	2,1
Bậc 3 - IGA	3x3x2	2160	-2,4100	5,3
	5x5x2	3840	-2,4400	4,2
	7x7x2	6000	-2,4611	3,3
	9x9x2	8640	-2,4741	2,8
	12x12x2	13500	-2,4920	2,1
Bậc 4 - IGA	3x3x2	3528	-2,4208	4,9
	5x5x2	5832	-2,4711	2,9
	7x7x2	8712	-2,5057	1,6
	9x9x2	12168	-2,5253	0,8
	12x12x2	15360	-2,4974	1,9









**Hình 5:** Kết quả chuyển vị theo phương z tương ứng với (a)  $n = 0$  (vật liệu hoàn toàn là Ti-6Al-4V); (b)  $n = 0,5$ ; (c)  $n = 5$ ; (d)  $n = \infty$  (vật liệu hoàn toàn là  $Al_2O_3$ )

phương pháp hiệu quả dùng để xấp xỉ bài toán có tầm áp điện. Do IGA dùng hình học NURBS làm hàm cơ sở nên sự liên tục giữa các phần tử là bậc cao giúp bài toán có nghiệm xấp xỉ tốt với mức lưới phù hợp. Điều này giúp tiết kiệm tài nguyên tính toán và tăng độ chính xác của lời giải khi so với những phương pháp số truyền thống khác. Qua phân tích tính cho mô hình vật liệu phân lớp chức năng có phần tử áp điện sẽ tạo tiền đề để giải quyết bài toán điều khiển chủ động cho các kết cấu làm từ vật liệu phân lớp chức năng có tích hợp phần tử áp điện bằng cách định nghĩa các lớp vật liệu áp điện lần lượt là actuator và sensor.

### LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu được tài trợ bởi Trường Đại học Bách Khoa, ĐHQG-HCM trong khuôn khổ Đề tài mã số T-KHUD-2018-20

### DANH MỤC TỪ VIẾT TẮT

IGA: Phân tích đẳng hình học – Isogeometric analysis  
 FGM: Vật liệu phân lớp chức năng - Functionally graded material

NURBS: Hàm cơ sở Spline tỉ lệ không đồng nhất - Non-uniform rational basis spline  
 CAD: thiết kế với hỗ trợ máy tính - Computer Aided Design  
 FEA: phân tích phần tử hữu hạn - Finite Element Analysis  
 FEM: phương pháp phần tử hữu hạn - Finite Element Method  
 CPT: Lý thuyết tấm cổ điển - Classical Plate Theory  
 CSDSG: phương pháp hàm trơn rời rạc dựa trên ô - Cell-based Smoothed Discrete Shear Gap  
 FSDT: lý thuyết cắt bậc nhất – First-Order Shear Deformation Theory  
 CFFF: ngàm 1 cạnh và 3 cạnh tự do  
 SCSC: ngàm 2 cạnh và 2 cạnh tựa đơn

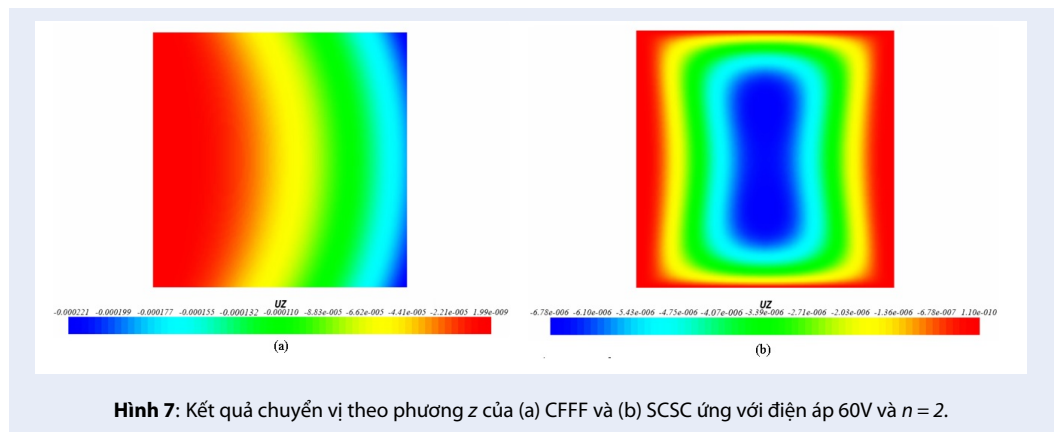
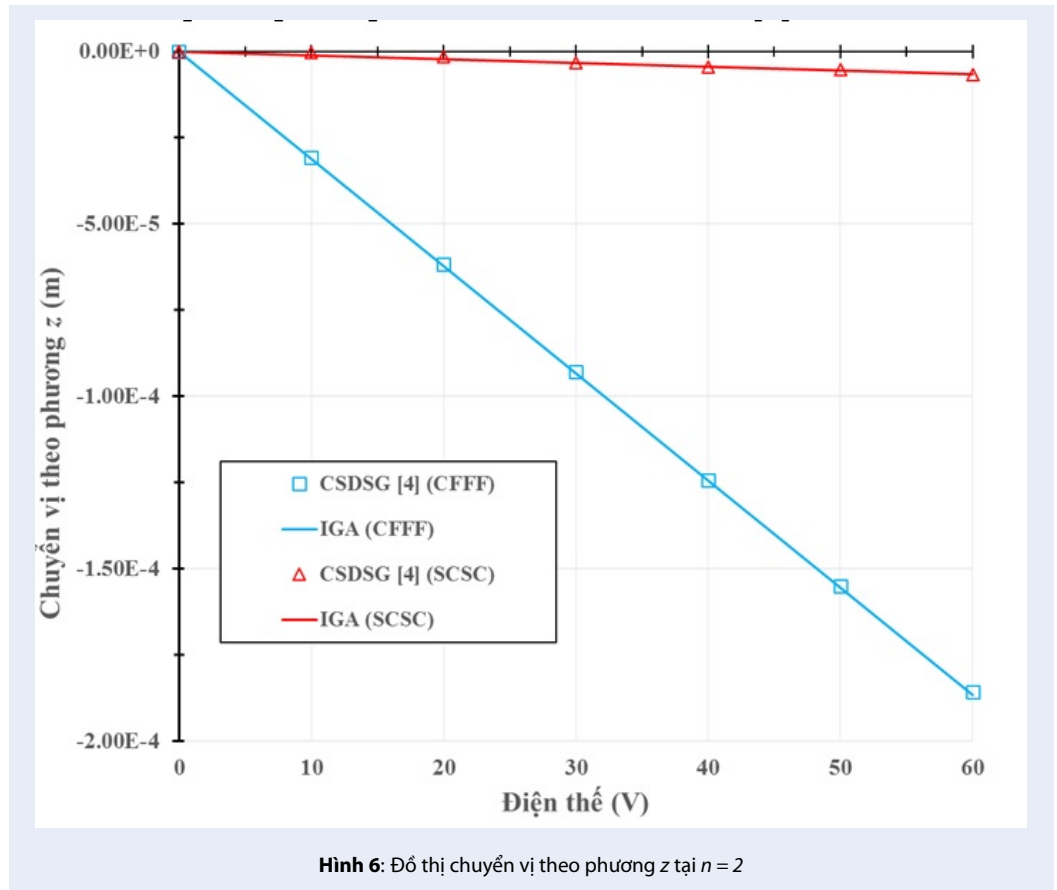
### XUNG ĐỘT LỢI ÍCH

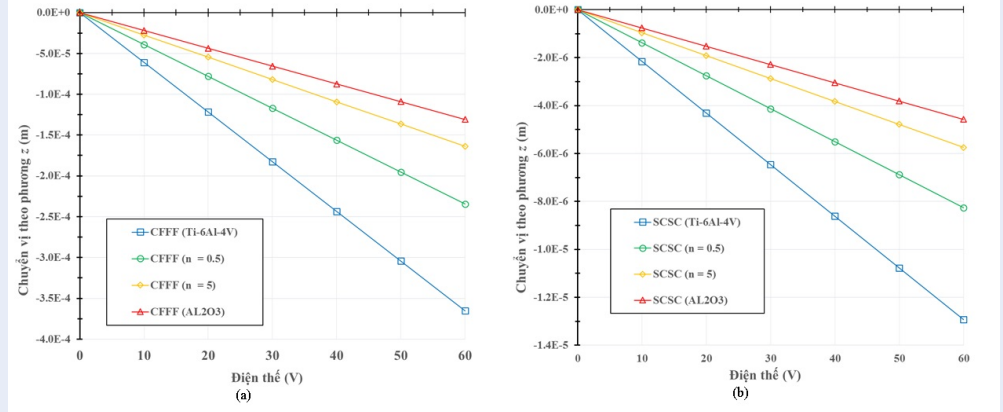
Nhóm tác giả xin cam đoan rằng không có bất kỳ xung đột lợi ích nào trong công bố bài báo.

### ĐÓNG GÓP CỦA TÁC GIẢ

Nguyễn Duy Khương xây dựng dữ liệu và chạy kết quả tính toán.  
 Nguyễn Mạnh Tiến viết bản thảo và phân tích kết quả.







**Hình 8:** Kết quả chuyển vị theo phương z của tấm chịu điều kiện biên (a) CFFF tại điểm  $(0,4; 0,2; 0,0026)$  (m); (b) SCSC tại điểm  $(0,2; 0,2; 0,0026)$  (m)

Nguyễn Xuân Hùng đóng góp ý tưởng khoa học cho bài báo.

Vũ Công Hòa kiểm tra lại bài báo.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hughes. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005;194(39 - 41):4135–4195. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.008>.
2. Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites part B: Engineering*. 1997;28(1-2). Available from: [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9).
3. He XQ, Ng TY, Sivashanker S, Liew KM. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. *International Journal of Solids and Structures*. 2001;38(9):1641–1655. Available from: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00050-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00050-0).

ternational Journal of Solids and Structures. 2001;38(9):1641–1655. Available from: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00050-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00050-0).

4. Nguyen-Quang K, Dang-Trung H, Ho-Huu V, Luong-Van H, Nguyen-Thoi T. Analysis and control of FGM plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3). *Composite Structures*. 2017;165:115–129. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.006>.
5. Alibeigloo. Static analysis of a functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers as sensor and actuator. *Smart Materials and Structures*. 2009;18(6):12. Available from: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/18/6/065004>.
6. Cottrell JA, Hughes TJR, Bazilevs Y. *Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA*. 2009; Available from: <https://doi.org/10.1002/9780470749081>.

# An application of isogeometric analysis for active control the solid functionally graded material plates with actuator patches using piezoelectric material

Nguyen Duy Khuong<sup>1,\*</sup>, Nguyen Manh Tien<sup>1</sup>, Nguyen Xuan Hung<sup>2</sup>, Vu Cong Hoa<sup>1</sup>



Use your smartphone to scan this QR code and download this article

## ABSTRACT

This paper applies isogeometric analysis (IGA) to simulate active control of the functionally graded material (FGM) plates by using piezoelectric material patches. This control helps to reduce the deflection of the plate under the effect of static load, which makes the structure more resistant to loading. IGA is built on the non-uniform rational basis spline (NURBS) basic function with many advantages such as: describing geometry exactly by approximating by higher order function and directly using this function to approach procedure. Furthermore, NURBS geometry has mesh flexibility and high continuity between elements, making the problem highly accurate. Three-dimensional model for plate-like structure consists of upper and lower layers made of piezoelectric materials, the middle layer is FGM. The obtained results will be verified with the published results to prove the efficiency of the proposed method for this problem. Through the obtained results, it is shown that IGA is used effectively for the active control problem by piezoelectric patches to reduce the displacement of FGM plates. The efficiency shown when using a small number of degrees of freedom but still ensuring the solution has accurate results when compared with the reference solution.

**Key words:** Isogeometric analysis, functionally graded material, piezoelectric

<sup>1</sup>Ho Chi Minh City University of Technology, VNU-HCM

<sup>2</sup>Ho Chi Minh City University of Technology

## Correspondence

**Nguyen Duy Khuong**, Ho Chi Minh City University of Technology, VNU-HCM  
Email: ndkhuong@hcmut.edu.vn

## History

- Received: 29-3-2019
- Accepted: 14-5-2019
- Published: 31-12-2019

DOI :10.32508/stdjet.v2iSI2.493



## Copyright

© VNU-HCM Press. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license.



**Cite this article :** Khuong N D, Tien N M, Hung N X, Hoa V C. **An application of isogeometric analysis for active control the solid functionally graded material plates with actuator patches using piezoelectric material.** *Sci. Tech. Dev. J. – Engineering and Technology*; 2(SI2):SI63-SI73.